

Méthodes de calcul des structures élastiques

par **Jean COURBON**
Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées
Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

1. Méthode des éléments élastiques	A 330 - 2
1.1 Formules préliminaires	— 2
1.2 Éléments élastiques	— 2
1.3 Composition des éléments élastiques	— 3
1.4 Application au calcul des structures hyperstatiques	— 4
1.5 Théorie des réseaux élastiques	— 5
2. Structures (S) constituées d'un nombre fini de structures élémentaires	— 7
2.1 Définition des structures (S)	— 7
2.2 État de sollicitation et état de déplacement de la structure	— 7
2.3 État de contrainte et état de déformation de la structure	— 8
2.4 Équations et formules fondamentales	— 8
2.5 Structures élastiques (S)	— 10
2.6 Exemples de structures élastiques (S)	— 10
2.7 Méthode des forces	— 12
2.8 Méthode des déplacements	— 14
2.9 Méthode des déplacements déduite des matrices de rigidité généralisées	— 15
2.10 Vibrations non amorties des structures (S)	— 16
3. Méthode des éléments finis	— 17
3.1 Principe de la méthode des éléments finis	— 17
3.2 Formulation générale de la méthode des éléments finis	— 18
3.3 Structures élastiques planes	— 19
3.4 Plaques minces	— 22
3.5 Problèmes de Dirichlet et de Neumann dans le plan	— 23
3.6 Principaux programmes de calcul	— 26
Références bibliographiques	— 26

Les notations sont définies au début de la présente rubrique **Calcul des structures**.

1. Méthode des éléments élastiques

1.1 Formules préliminaires

1.1.1 Représentation matricielle d'un système de forces appliqué à un solide

Relativement à un repère orthonormé $Oxyz$, un système de forces F appliqué à un solide Σ est défini par sa résultante générale \vec{R} de composantes (R_x, R_y, R_z) et son moment résultant $\vec{\Gamma}$ par rapport à O de composantes $(\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z)$; ce système est donc défini par la matrice colonne Φ :

$$\Phi = \begin{bmatrix} R \\ \Gamma \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad R = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_x \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{bmatrix}$$

Proposons-nous de déterminer la matrice colonne Φ' qui représente le système de forces F dans un nouveau repère orthonormé $O'x'y'z'$. Un vecteur représenté par une matrice colonne V dans $Oxyz$ est représenté par une matrice colonne $V' = \Omega V$ dans $O'x'y'z'$. La matrice orthogonale Ω définit les directions des axes du nouveau repère. Par ailleurs, si (ξ, η, ζ) sont les coordonnées de O' dans le repère $Oxyz$, nous désignerons par H la matrice antisymétrique :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \zeta & -\eta \\ -\zeta & 0 & \xi \\ \eta & -\xi & 0 \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions, les relations vectorielles qui définissent la résultante générale \vec{R}' et le moment résultant $\vec{\Gamma}'$ dans le nouveau repère :

$$\vec{R}' = \vec{R} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}' = \vec{\Gamma} + \vec{R} \wedge \vec{OO'}$$

sont équivalentes aux relations matricielles :

$$R' = \Omega R \quad \text{et} \quad \Gamma' = \Omega (\Gamma + HR)$$

Nous en déduisons immédiatement la formule :

$$\Phi' = T\Phi \quad \text{avec} \quad T = \begin{bmatrix} \Omega & 0 \\ \Omega H & \Omega \end{bmatrix} \quad (1)$$

La matrice de passage T n'est pas une matrice orthogonale.

1.1.2 Représentation matricielle du déplacement infiniment petit d'un solide

Dans le repère orthonormé $Oxyz$, le déplacement infiniment petit d'un solide Σ est défini par le déplacement de l'élément du solide dont le centre coïncidait, avant le déplacement, avec l'origine O des axes. Le déplacement de cet élément est le produit d'une translation \vec{U} de composantes (U_x, U_y, U_z) et d'une rotation $\vec{\Theta}$ de composantes $(\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z)$. Le déplacement infiniment petit du solide est donc défini par la matrice Δ :

$$\Delta = \begin{bmatrix} U \\ \Theta \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad U = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} \Theta_x \\ \Theta_y \\ \Theta_z \end{bmatrix}$$

Nota : l'ordre de composition de la translation \vec{U} et de la rotation $\vec{\Theta}$ est indifférent, puisque le déplacement est infiniment petit.

Pour déterminer la matrice Δ' qui représente le déplacement du solide dans le nouveau repère orthonormé $O'x'y'z'$, il suffit d'écrire que le travail du système de forces F appliqué au solide Σ dans un déplacement infiniment petit du solide ne dépend pas du repère choisi pour l'évaluer ; donc :

$$\Phi^t \Delta = \Phi'^t \Delta'$$

avec Φ^t transposé de Φ .

Compte tenu de la relation (1), nous en déduisons la formule :

$$\Delta' = (T^t)^{-1} \Delta \quad (2)$$

1.2 Éléments élastiques

1.2.1 Définition. Matrice d'élasticité et matrice de rigidité

Un **élément élastique** \mathcal{E} , noté (Σ_0, Σ_1) , est constitué par deux solides Σ_0 (*origine*) et Σ_1 (*extrémité*) liés élastiquement. Donc, un repère orthonormé étant choisi, fixons Σ_0 et appliquons à Σ_1 un système de forces défini par la matrice Φ ; Σ_1 subit un déplacement infiniment petit défini par la matrice :

$$\Delta = K\Phi \quad (3)$$

La matrice carrée d'ordre 6, K , qui est symétrique en vertu du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans ce traité) est la **matrice d'élasticité** de l'élément. Par définition, Δ est la **déformation** et Φ est la **contrainte** de l'élément.

Un élément élastique est **régulier** lorsque la matrice K est régulière ; dans ce cas $R = K^{-1}$ est la **matrice de rigidité** de l'élément, et l'on a :

$$\Phi = R\Delta \quad (4)$$

Le potentiel W de l'élément a pour expressions :

$$W = \frac{1}{2} \Phi^t \Delta = \frac{1}{2} \Delta^t \Phi = \frac{1}{2} \Phi^t K \Phi = \frac{1}{2} \Delta^t R \Delta$$

Les éléments élastiques différents (Σ_0, Σ_1) et (Σ_1, Σ_0) ont la même matrice d'élasticité.

Un **exemple** d'élément élastique régulier (Σ_0, Σ_1) est fourni par un tronçon de poutre de fibre moyenne orientée $G_0 G_1$; Σ_0 et Σ_1 sont les solides liés aux sections de la poutre de centre de gravité G_0 et G_1 .

Il existe également des éléments élastiques **singuliers**. Par exemple, si les solides Σ_0 et Σ_1 sont liés rigidement, Δ est nul quel que soit Φ , et la matrice d'élasticité est nulle ; s'il n'existe aucune liaison entre les solides Σ_0 et Σ_1 , Φ est nul quel que soit Δ , et la matrice de rigidité est nulle.

Nota : les articulations cylindriques et sphériques, les appuis glissants, les appuis simples, etc. sont des éléments singuliers.

Pour simplifier l'exposé, nous nous bornerons à ne considérer que des éléments réguliers, en observant que *tout élément singulier peut être remplacé par un élément régulier de comportement infiniment voisin*.

1.2.2 Changement de repère

Proposons-nous de déterminer la matrice d'élasticité K' et la matrice de rigidité R' de l'élément (Σ_0, Σ_1) dans un nouveau repère orthonormé $O'x'y'z'$; nous avons successivement, d'après les formules (2), (3) et (1) :

$$\Delta' = (T^t)^{-1} \Delta = (T^t)^{-1} K \Phi = (T^t)^{-1} K T^{-1} \Phi'$$

donc la matrice K' a pour expression :

$$K' = (T^{-1})^t K T^{-1} \quad (5)$$

et la matrice $R' = K'^{-1}$ a pour expression :

$$R' = T R T^t$$

L'intérêt de la formule (5) est le suivant : il est en général aisé de déterminer la matrice d'élasticité K' dans un repère particulier $O'x'y'z'$ lié à l'élément. Si T désigne la matrice qui permet de passer du repère général $Oxyz$ au repère $O'x'y'z'$, la matrice d'élasticité K de l'élément dans le repère général est donnée par la relation :

$$K = T^t K' T$$

Dans le cas d'un **élément élastique plan** sollicité dans son plan, nous avons :

$$\Phi^t = [R_x R_y \Gamma_z], \quad \Delta^t = [U_x U_y \Theta_z]$$

et la matrice d'élasticité est une matrice symétrique d'ordre 3. Les formules (1), (2) et (5) sont encore exactes, à condition de définir la matrice de passage T par :

$$T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \eta & -\xi & 1 \end{bmatrix}$$

φ désignant l'angle $(Ox, O'y')$, et (ξ, η) les coordonnées de O' dans le repère Oxy . La formule (5) montre qu'il est alors possible de trouver un repère ΩXY dans lequel la matrice d'élasticité est diagonale ; Ω est le *centre élastique*, ΩXY sont les *axes centraux*, et les éléments de la matrice d'élasticité diagonale sont les *coefficients élastiques principaux*.

1.2.3 Déformation propre d'un élément élastique

Pour simplifier l'exposé, nous supposons que l'élément élastique $\mathcal{E}_{01} = (\Sigma_0, \Sigma_1)$ est constitué par un tronçon de poutre de fibre moyenne orientée $G_0 G_1$; le solide Σ_0 est lié à la section origine et le solide Σ_1 est lié à la section extrémité.

On appelle **déformation propre** de l'élément élastique \mathcal{E}_{01} le déplacement δ_{01} du solide Σ_1 , le solide Σ_0 étant fixe, sous l'effet des forces extérieures appliquées à la poutre $G_0 G_1$ et sous l'effet des déformations imposées par les variations de température ou le retrait. On définit de la même façon la déformation propre δ_{10} de l'élément $\mathcal{E}_{10} = (\Sigma_1, \Sigma_0)$.

Il existe une relation simple entre les matrices δ_{01} et δ_{10} . Désignons par Φ_0 la matrice qui définit le système des forces appliquées à Σ_0 , par Φ_1 la matrice qui définit le système des forces appliquées à Σ_1 , et par F la matrice des éléments de réduction du système des forces appliquées au tronçon de poutre $G_0 G_1$. L'équilibre de l'élément se traduit par l'équation :

$$\Phi_0 + \Phi_1 + F = 0$$

Désignons par D_0 et D_1 les matrices qui définissent les déplacements de Σ_0 et de Σ_1 , afin de bien distinguer le déplacement d'un solide (matrice D) de la déformation d'un élément (matrice Δ). Soit K la matrice d'élasticité des éléments \mathcal{E}_{01} et \mathcal{E}_{10} ; le déplacement relatif de Σ_1 par rapport à Σ_0 est :

$$D_1 - D_0 = \delta_{01} + K \Phi_1$$

et le déplacement relatif de Σ_0 par rapport à Σ_1 est :

$$D_0 - D_1 = \delta_{10} + K \Phi_0$$

Il résulte immédiatement des trois équations précédentes la relation :

$$\delta_{01} + \delta_{10} = KF \quad (6)$$

Cette équation, qui est invariante dans un changement de repère, se réduit à $\delta_{01} + \delta_{10} = 0$ dans le cas particulier où $F = 0$.

1.3 Composition des éléments élastiques

1.3.1 Composition en série.

Chaîne d'éléments élastiques

Considérons n éléments élastiques :

$$\mathcal{E}_1 = (\Sigma_1, \Sigma'_1), \quad \mathcal{E}_2 = (\Sigma_2, \Sigma'_2), \dots, \mathcal{E}_n = (\Sigma_n, \Sigma'_n)$$

Établissons une liaison rigide entre les solides :

$$\Sigma'_i \text{ et } \Sigma_{i+1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

nous obtenons un élément élastique $\mathcal{E} = (\Sigma_1, \Sigma'_n)$ qui est le **composé en série** des éléments $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$; les éléments $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ forment une **chaîne** d'éléments élastiques.

Désignons par K_i et K les matrices d'élasticité des éléments composants \mathcal{E}_i et de l'élément composé \mathcal{E} dans un *même repère*. Si nous appliquons au solide Σ'_n , le solide Σ_1 étant fixe, un système de forces défini par la matrice Φ , tous les éléments ont la même contrainte Φ , et leurs déformations ont pour expressions :

$$\Delta_i = K_i \Phi, \quad \Delta = K \Phi$$

Mais il résulte de la composition en série que :

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n$$

Nous obtenons donc la formule :

$$K = K_1 + K_2 + \dots + K_n \quad (7)$$

Donc la matrice d'élasticité de l'élément résultant de la composition en série est la somme des matrices d'élasticité des éléments composants.

Voici une application de la formule (7). Un élément élastique constitué par un tronçon de poutre $G_0 G_1$ peut être considéré comme résultant de la composition en série des éléments infinitésimaux de la poutre. Un élément infinitésimal de centre G et de longueur ds , dans le repère $Gx'y'z'$ (Gx' tangent à la fibre moyenne, Gy' et Gz' axes centraux d'inertie de la section), une matrice d'élasticité $K(s) ds$:

$$K(s) = \text{Diag} \left(\frac{1}{ES_1}, \frac{1}{GS_2}, \frac{1}{GS_3}, \frac{1}{GI_1}, \frac{1}{EI_2}, \frac{1}{EI_3} \right)$$

ES_1 désignant la rigidité à la compression, GS_2 et GS_3 les rigidités au cisaillement, GI_1 la rigidité à la torsion, et EI_2 et EI_3 les rigidités à la flexion.

Soit $T(s)$ la matrice qui permet de passer du repère général $Oxyz$ au repère mobile $Gx'y'z'$. La matrice d'élasticité K du tronçon de poutre $G_0 G_1$ dans le repère général a pour valeur :

$$K = \int_{s_0}^{s_1} T^t(s) K(s) T(s) ds$$

1.3.2 Composition en parallèle. Faisceau d'éléments élastiques

Considérons n éléments élastiques :

$$\mathcal{E}_1 = (\Sigma_1, \Sigma'_1), \quad \mathcal{E}_2 = (\Sigma_2, \Sigma'_2), \dots, \mathcal{E}_n = (\Sigma_n, \Sigma'_n)$$

Rendons solidaires d'un même solide Σ tous les solides Σ_i ; de même, rendons solidaires d'un même solide Σ' tous les solides Σ'_i . Nous obtenons ainsi un élément élastique $\mathcal{E} = (\Sigma, \Sigma')$ qui est le **composé en parallèle** des éléments $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$; les éléments $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$ forment un **faisceau** d'éléments élastiques.

Désignons par R_i et R les matrices de rigidité des éléments composants \mathcal{E}_i et de l'élément composé \mathcal{E} dans un *même repère*. Si, le solide Σ étant fixe, nous imposons au solide Σ' un déplacement défini par la matrice Δ , tous les éléments ont la même déformation Δ et leurs contraintes sont :

$$\Phi_i = R_i \Delta, \quad \Phi = R \Delta$$

Mais il résulte de la composition en parallèle que :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_n$$

Nous obtenons donc la formule :

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (8)$$

Donc la matrice de rigidité de l'élément résultant de la composition en parallèle est la somme des matrices de rigidité des éléments composants.

1.4 Application au calcul des structures hyperstatiques

1.4.1 Structures ouvertes. Méthode des appuis élastiques

1.4.1.1 Principe de la méthode

Une structure, composée d'éléments élastiques, est dite **ouverte** lorsque la suppression d'un élément n'aboutissant pas à un appui décompose la structure en deux structures indépendantes.

Considérons (figure 1) une structure ouverte constituée de poutres. Le système des forces données appliquées à la structure est la somme de systèmes partiels ne comprenant que les forces appliquées à une poutre de la structure. Nous obtiendrons les efforts et les déformations de la structure en faisant la somme des efforts et des déformations causés par chacun des systèmes partiels.

De même, si des déformations sont imposées aux poutres de la structure (dilatation thermique, retrait), nous obtiendrons les efforts et les déformations de la structure en faisant la somme des efforts et des déformations calculés en supposant qu'une seule poutre de la structure subisse les déformations imposées.

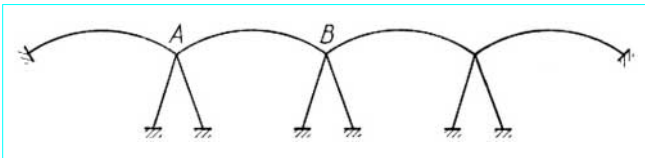


Figure 1 – Structure ouverte constituée de poutres

Supposons donc que seule la poutre AB soit sollicitée par des forces et des déformations imposées. Cette poutre peut être considérée comme une poutre dont les extrémités A et B sont liées au solide de référence fixe Σ_0 par des **appuis élastiques**. L'appui élastique en A est un élément élastique $\mathcal{E}_A = (\Sigma_0, \Sigma_A)$, Σ_A désignant le solide lié à la section A ; de même, l'appui élastique en B est un élément élastique $\mathcal{E}_B = (\Sigma_0, \Sigma_B)$, Σ_B désignant le solide lié à la section B . La structure étant ouverte, des opérations de composition en série et de composition en parallèle permettent de déterminer les matrices d'élasticité K_A et K_B des éléments \mathcal{E}_A et \mathcal{E}_B .

1.4.1.2 Étude de la poutre AB sur appuis élastiques \mathcal{E}_A et \mathcal{E}_B

Considérons (figure 2) l'élément élastique (Σ_C, Σ_D) qui résulte de la composition en série des éléments $\mathcal{E}_A, (\Sigma_A, \Sigma_B)$ et \mathcal{E}_B . L'étude de la poutre sollicitée AB revient à l'étude de l'élément (Σ_C, Σ_D) dans lequel les solides Σ_C et Σ_D sont fixes.

La matrice d'élasticité de cet élément est la somme des matrices d'élasticité des éléments $\mathcal{E}_A, (\Sigma_A, \Sigma_B)$ et \mathcal{E}_B :

$$K = K_A + K_{AB} + K_B$$

Désignons par F la matrice des éléments de réduction du système des forces appliquées à la poutre AB , et par δ_{AB} et δ_{BA} les déformations propres des éléments (Σ_A, Σ_B) et (Σ_B, Σ_A) ; les déformations propres δ_{CD} et δ_{DC} des éléments (Σ_C, Σ_D) et (Σ_D, Σ_C) sont :

$$\delta_{CD} = K_A F + \delta_{AB} \quad \text{et} \quad \delta_{DC} = K_B F + \delta_{BA}$$

Désignons par Φ_A et Φ_B les matrices représentant les systèmes de forces, ou *réactions*, exercés par les appuis \mathcal{E}_A et \mathcal{E}_B sur la poutre AB ; nous avons :

$$\Phi_A + \Phi_B + F = 0$$

Les systèmes de forces exercés sur les solides Σ_C et Σ_D des éléments \mathcal{E}_A et \mathcal{E}_B sont définis par les matrices Φ_A et Φ_B , puisque ces éléments ne sont pas directement sollicités par les forces données ou les déplacements imposés. En écrivant que le déplacement de Σ_D par rapport à Σ_C et le déplacement de Σ_C par rapport à Σ_D sont nuls, nous obtenons les équations :

$$\delta_{CD} + K \Phi_B = 0 \quad \text{et} \quad \delta_{DC} + K \Phi_A = 0$$

qui donnent les réactions inconnues :

$$\Phi_A = -R \delta_{DC} \quad \text{et} \quad \Phi_B = -R \delta_{CD}$$

$R = K^{-1}$ désignant la matrice de rigidité de l'élément (Σ_C, Σ_D) ; il suffit d'ailleurs, en vertu de l'équation d'équilibre, de calculer une seule des deux réactions d'appui.

1.4.1.3 Efforts dans les autres poutres de la structure

Il reste à déterminer les efforts dans les poutres qui constituent les appuis élastiques \mathcal{E}_A et \mathcal{E}_B .

Considérons, par exemple, l'appui élastique $\mathcal{E}_A = (\Sigma_C, \Sigma_A)$ (figure 2) ; Σ_C est soumis au système de forces Φ_A , et Σ_A au système de forces $-\Phi_A$.

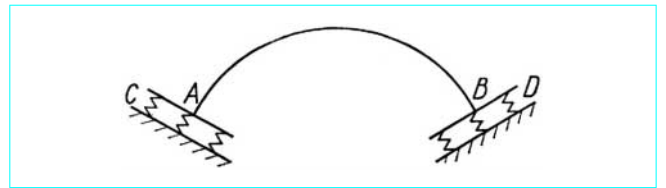


Figure 2 – Élément élastique

— Dans le cas où \mathcal{E}_A résulte de la *composition en série* de n éléments (§ 1.3.1) :

$$\mathcal{E}_1 = (\Sigma_C, \Sigma_1), \quad \mathcal{E}_2 = (\Sigma_1, \Sigma_2), \dots, \quad \mathcal{E}_n = (\Sigma_{n-1}, \Sigma_A)$$

tous les éléments \mathcal{E}_i sont soumis aux mêmes systèmes de forces, Φ_A appliqué à Σ_{i-1} et $-\Phi_A$ appliqué à Σ_i .

— Le cas où \mathcal{E}_A résulte de la *composition en parallèle* de n éléments (§ 1.3.2) :

$$\mathcal{E}_1 = (\Sigma_1, \Sigma_A), \quad \mathcal{E}_2 = (\Sigma_2, \Sigma_A), \dots, \quad \mathcal{E}_n = (\Sigma_n, \Sigma_A)$$

les solides Σ_i étant liés rigidement au solide Σ_C , est un peu plus compliqué. Si Φ_i représente le système des forces appliquées au solide Σ_i de l'élément \mathcal{E}_i dont la matrice d'élasticité est K_i , nous avons, puisque les éléments \mathcal{E}_i et \mathcal{E}_A ont la même déformation :

$$K_i \Phi_i = K_A \Phi_A$$

donc, R_i désignant la matrice de rigidité de \mathcal{E}_i :

$$\Phi_i = R_i K_A \Phi_A$$

De proche en proche, par décomposition en série ou en parallèle, on trouvera les efforts dans toutes les poutres qui constituent les appuis élastiques \mathcal{E}_A et \mathcal{E}_B .

1.4.2 Structures quelconques. Méthode des déplacements nodaux

Considérons (figure 3) une structure élastique composée de poutres assemblées rigidement entre elles à leurs extrémités A_i appelées **nœuds** de la structure. Cette structure est soumise à des forces données et à des déformations imposées par la température ou le retrait.

Associions à chaque nœud A_i le solide Σ_i lié à ce nœud, et désignons par D_i la matrice qui définit le déplacement de Σ_i ; nous choisissons pour inconnues les n déplacements D_i des nœuds autres que les nœuds d'appui, dont les déplacements sont nuls ($n = 5$ dans le cas de la figure 3).

Toute poutre $A_r A_s$ qui relie deux nœuds constitue un élément élastique $\mathcal{E}_{rs} = (\Sigma_r, \Sigma_s)$. En désignant par K_{rs} et R_{rs} les matrices d'élasticité et de rigidité, et par δ_{rs} la déformation propre de l'élément \mathcal{E}_{rs} , nous avons la relation :

$$D_s - D_r = \delta_{rs} + K_{rs} \Phi_{rs}$$

dans laquelle la matrice Φ_{rs} représente le système des forces exercées sur la poutre $A_r A_s$ par le solide Σ_s . Il en résulte que :

$$\Phi_{rs} = R_{rs} (D_s - D_r) - R_{rs} \delta_{rs}$$

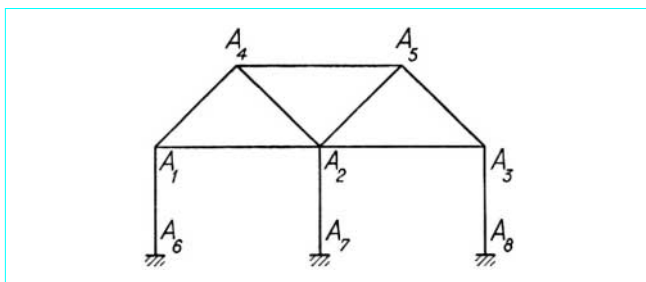


Figure 3 – Structure élastique composée de poutres assemblées rigidement entre elles

L'équilibre du solide Σ_i se traduit par la relation :

$$\sum_j \Phi_{ji} = 0$$

la sommation étant étendue à tous les nœuds A_j , y compris les nœuds d'appui, reliés au nœud A_i par une poutre de la structure. Compte tenu de l'expression de Φ_{rs} donnée précédemment, nous obtenons n équations :

$$\left(\sum_j R_{ji} \right) D_i - \sum_j R_{ji} D_j = \sum_j R_{ji} \delta_{ji} \quad (9)$$

qui permettent de calculer les déplacements inconnus D_i ; dans ces équations, on peut remplacer R_{ji} par R_{ij} .

1.5 Théorie des réseaux élastiques

1.5.1 Définitions

Un **réseau élastique** est un ensemble d'éléments élastiques appelés **branches** du réseau ; les solides communs à plusieurs branches sont les **nœuds** du réseau. Un réseau d'un seul tenant est dit **connexe**.

À toute structure élastique composée de poutres, on peut, en définissant un sens de parcours sur chaque poutre, associer un réseau élastique connexe. Ainsi, à la structure de la figure 3, on peut associer le réseau élastique représenté sur la figure 4 ; on notera que les nœuds A_6 , A_7 et A_8 de la structure, qui sont solidaires de la fondation (solide absolu de référence), sont représentés par un seul nœud A_0 du réseau élastique.

Une **maille** du réseau est un contour fermé constitué par une succession de branches. Un **faisceau** est un ensemble de branches ayant deux mêmes nœuds pour extrémités. Un réseau **simplement connexe** est un réseau qui ne comporte pas de mailles, donc pas de faisceaux ; un réseau simplement connexe est associé à une structure isostatique.

Un **sous-réseau** se déduit du réseau par suppression d'une ou de plusieurs branches. Un **arbre** est un sous-réseau simplement connexe qui contient tous les nœuds du réseau. Un arbre ne contient donc ni mailles ni faisceaux, et le nombre de ses branches est égal au nombre des nœuds du réseau diminué d'une unité ; tout arbre d'un réseau a donc le même nombre de branches. Les **branches complémentaires** d'un arbre sont les branches du réseau qui n'appartiennent pas à l'arbre. Sur la figure 4, un arbre représenté en traits forts est composé des branches $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4$ et \mathcal{E}_5 ; les branches complémentaires de cet arbre sont les branches $\mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7, \mathcal{E}_8, \mathcal{E}_9$ et \mathcal{E}_{10} .

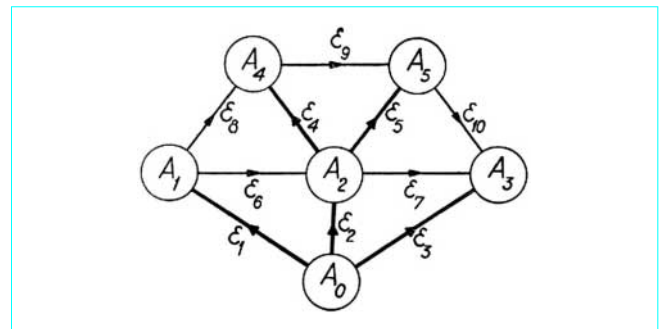


Figure 4 – Réseau élastique associé à la structure de la figure 3

Nous allons donner deux méthodes pour déterminer l'équilibre d'un réseau élastique dont seuls les nœuds A_k sont sollicités par des systèmes de forces représentés par des matrices Ψ_k . Nous désignerons par Δ_j , Φ_j , K_j et R_j la déformation, la contrainte, la matrice d'élasticité et la matrice de rigidité de la branche \mathcal{E}_j du réseau. Nous supposons également que le réseau est soumis à des déformations imposées éventuelles, causées par la dilatation thermique ou le retrait ; ces déformations imposées donnent aux branches du réseau des déformations propres δ_j .

1.5.2 Méthode des mailles

Choisissons un arbre du réseau comportant n branches \mathcal{E}_j ($j = 1, 2, \dots, n$). Si b est le nombre des branches du réseau, il existe $m = b - n$ branches complémentaires. Nous prenons pour inconnues les contraintes X_i ($i = 1, 2, \dots, m$) des branches complémentaires.

Supposons les branches complémentaires supprimées ; les systèmes de forces extérieures Ψ_k appliqués aux nœuds provoquent dans les branches \mathcal{E}_j de l'arbre des contraintes F_j que l'on détermine au moyen des équations de la statique (ainsi, dans le cas de la figure 4 et pour l'arbre représenté en traits forts, on trouve $F_2 = \Psi_2 + \Psi_4 + \Psi_5$). Les matrices F_j ($j = 1, 2, \dots, n$) sont donc connues ; nous poserons $F_j = 0$ pour $j > n$.

Lorsqu'on ajoute à l'arbre choisi une branche complémentaire \mathcal{E}_{n+i} , on fait apparaître une maille \mathcal{M}_i dont fait partie la branche \mathcal{E}_{n+i} ; la somme algébrique des déformations des branches de la maille \mathcal{M}_i est évidemment nulle ; cela s'exprime par l'équation :

$$\sum_j \eta_{ij} \Delta_j = 0$$

dans laquelle :

- $\eta_{ij} = 0$ si \mathcal{E}_j n'appartient pas à la maille \mathcal{M}_i ;
- $\eta_{ij} = 1$ si \mathcal{E}_j appartient à \mathcal{M}_i et si \mathcal{E}_j et \mathcal{E}_{n+i} sont dirigés dans le même sens lorsqu'on parcourt la maille ;
- $\eta_{ij} = -1$ si \mathcal{E}_j appartient à \mathcal{M}_i et si \mathcal{E}_j et \mathcal{E}_{n+i} sont dirigés dans des sens opposés lorsqu'on parcourt la maille.

Il est aisé de voir que l'effort Φ_j dans une branche du réseau s'exprime en fonction des matrices F_j et des contraintes X_i par la formule :

$$\Phi_j = F_j + \sum_i \eta_{ij} X_i$$

Enfin, les déformations Δ_j des branches du réseau ont pour valeurs :

$$\Delta_j = \delta_j + K_j \Phi_j$$

En définissant les matrices colonnes Δ , Φ , δ , F et X par :

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \dots \\ \Delta_b \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_b \end{bmatrix}, \quad \delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dots \\ \delta_b \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_b \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_m \end{bmatrix}$$

la matrice d'élasticité des branches K et la matrice de topologie de mailles η du réseau par :

$$K = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_b \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_{11} I & \eta_{12} I & \dots & \eta_{1b} I \\ \eta_{21} I & \eta_{22} I & \dots & \eta_{2b} I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \eta_{m1} I & \eta_{m2} I & \dots & \eta_{mb} I \end{bmatrix}$$

I désignant la matrice unité d'ordre 6, les équations précédentes s'écrivent :

$$\eta \Delta = 0, \quad \Phi = F + \eta^t X, \quad \Delta = \delta + K \Phi$$

L'élimination de Δ et de Φ entre ces trois équations donne immédiatement l'équation qui permet de calculer la matrice inconnue X :

$$(\eta K \eta^t) X + \eta (\delta + K F) = 0 \quad (10)$$

1.5.3 Méthode des faisceaux

Choisissons, comme dans la méthode des mailles, un arbre comportant n branches \mathcal{E}_j ($j = 1, 2, \dots, n$), et prenons pour inconnues les déformations Y_j ($j = 1, 2, \dots, n$) des branches de l'arbre choisi.

Supposons les branches \mathcal{E}_j de l'arbre rigidifiées ; les systèmes de forces Ψ_k appliqués aux nœuds ne vont créer de contraintes F_j que dans les branches \mathcal{E}_j de l'arbre ; ce sont évidemment les contraintes calculées en supprimant les branches complémentaires, qui ne subissent aucune déformation. Nous poserons $F_j = 0$ pour $j > n$.

Rendons élastique une branche \mathcal{E}_j de l'arbre ; les solides liés aux extrémités de cette branche sont réunis par différentes branches agissant en parallèle, qui forment donc un faisceau \mathcal{F}_j dont fait partie la branche \mathcal{E}_j . À toute branche \mathcal{E}_i du réseau nous associons un nombre ε_{ji} ainsi défini :

- $\varepsilon_{ji} = 0$ si \mathcal{E}_i n'appartient pas au faisceau \mathcal{F}_j ;
- $\varepsilon_{ji} = 1$ si \mathcal{E}_i appartient à \mathcal{F}_j et si \mathcal{E}_i et \mathcal{E}_j ont le même sens dans le faisceau ;
- $\varepsilon_{ji} = -1$ si \mathcal{E}_i appartient à \mathcal{F}_j et si \mathcal{E}_i et \mathcal{E}_j ont des sens opposés dans le faisceau.

Dans l'état d'équilibre du réseau, la somme algébrique des contraintes dans les branches du faisceau \mathcal{F}_j est nulle ; nous avons donc :

$$\sum_i \varepsilon_{ji} \Phi_i = 0$$

La contrainte Φ_j dans la branche \mathcal{E}_j du réseau est la somme de la contrainte F_j ($F_j = 0$) pour $i > n$) et de la contrainte provoquée par la déformation élastique $\Delta_j - \delta_j$, donc :

$$\Phi_j = F_j + R_j (\Delta_j - \delta_j)$$

Enfin, les déformations Δ_i des branches du réseau s'expriment en fonction des déformations Y_j des branches de l'arbre. En effet, en prenant le nœud appui A_0 comme solide de référence, on a $D_0 = 0$, et les b déformations des branches du réseau s'expriment en fonction des n déplacements des nœuds. On aboutit ainsi à la formule :

$$\Delta_i = \sum_j \eta_{ji} Y_j$$

Définissons les matrices Δ , Φ , δ et F comme dans la méthode des mailles, la matrice de rigidité des branches R et la *matrice de topologie de faisceaux* ε du réseau par :

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R_b \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}I & \varepsilon_{12}I & \dots & \varepsilon_{1b}I \\ \varepsilon_{21}I & \varepsilon_{22}I & \dots & \varepsilon_{2b}I \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{n1}I & \varepsilon_{n2}I & \dots & \varepsilon_{nb}I \end{bmatrix}$$

I désignant toujours la matrice unité d'ordre 6, les équations précédentes s'écrivent, Y désignant la matrice colonne formée par la juxtaposition des matrices colonnes Y_j :

$$\varepsilon\Phi = 0, \quad \Phi = F + R(\Delta - \delta), \quad \Delta = \varepsilon^t Y$$

L'élimination de Φ et de Δ entre ces trois relations donne l'équation qui permet de calculer la matrice inconnue Y :

$$(\varepsilon R \varepsilon^t) Y + \varepsilon(F - R\delta) = 0 \quad (11)$$

Il est possible de montrer que la méthode des faisceaux n'est pas différente de la méthode des déplacements nodaux (§ 1.4.2).

2. Structures (S) constituées d'un nombre fini de structures élémentaires

2.1 Définition des structures (S)

Les structures (S) sont constituées d'un nombre fini M de structures élémentaires ou **éléments** E^μ ($\mu = 1, 2, \dots, M$) assemblées entre elles en N **nœuds** A_v ($v = 1, 2, \dots, N$). L'élément E^μ est assemblé aux autres éléments en p^μ nœuds, et q_v éléments sont assemblés entre eux au nœud A_v .

Nous ferons les **hypothèses** suivantes.

— Les forces extérieures (forces données et réactions) ne sont appliquées qu'aux nœuds.

— Les liaisons sont en nombre suffisant pour assurer la position de la structure dans l'espace sans possibilité de déplacement.

— Les liaisons sont permanentes, invariables et sans frottement dans le cas où un mouvement relatif est possible (articulation). En particulier, des appuis élastiques doivent être considérés comme faisant partie de la structure.

La structure sera rapportée à un *repère général orthonormé* $Ox_1 x_2 x_3$.

2.2 État de sollicitation et état de déplacement de la structure

2.2.1 État de sollicitation

L'**état de sollicitation** de la structure (S) est défini par les forces extérieures (forces données et réactions). Si \vec{f}_v est la force de composantes (f_{v1}, f_{v2}, f_{v3}) et $\vec{\gamma}_v$ le couple de composantes

$(\gamma_{v1}, \gamma_{v2}, \gamma_{v3})$ appliqués au nœud A_v , la sollicitation du nœud A_v est définie par la matrice colonne :

$$F_v = \begin{bmatrix} f_v \\ \gamma_v \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad f_v = \begin{bmatrix} f_{v1} \\ f_{v2} \\ f_{v3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma_v = \begin{bmatrix} \gamma_{v1} \\ \gamma_{v2} \\ \gamma_{v3} \end{bmatrix}$$

Pour l'ensemble de la structure, l'état de sollicitation est défini par la matrice colonne F dont les $6N$ éléments sont des éléments des matrices F_v rangées dans l'ordre 1, 2, ..., N :

$$F = \text{Col}(F_v)$$

Les états de sollicitation de la structure forment un espace vectoriel $\mathcal{E}(F)$ de dimension finie. Les forces appliquées à (S) étant en équilibre, les $6N$ éléments de la matrice F vérifient les t équations nécessaires de la statique. La dimension de $\mathcal{E}(F)$ est donc $6N - t$.

Il en résulte que le nombre des liaisons externes nécessaires pour assurer la position de la structure dans l'espace doit être au moins égal à t .

— Si ce nombre est égal à t , les équations d'équilibre permettent de calculer les réactions, et la structure est **extérieurement isostatique**.

— Si ce nombre est $t + r_e$, la structure est **extérieurement hyperstatique** de degré r_e .

Nous considérerons des sollicitations constituées d'un ensemble de forces ou couples F_j agissant suivant les directions (lignes d'action des forces ou axes des couples) d'un ensemble J :

$$J = \{A_j d_j^j; j = 1, 2, \dots, m\} \quad (12)$$

Un tel état de sollicitation est défini par la matrice colonne F_j d'éléments F_j .

2.2.2 État de déplacement

L'**état de déplacement** de la structure (S) est défini par les déplacements des nœuds. Le déplacement du nœud A_v résulte de

la composition d'une translation $\vec{\lambda}_v$ de composantes $(\lambda_{v1}, \lambda_{v2}, \lambda_{v3})$

et d'une rotation $\vec{\omega}_v$ de composantes $(\omega_{v1}, \omega_{v2}, \omega_{v3})$; nous supposons la translation et la rotation très petites, de sorte que l'ordre de composition est indifférent. Le déplacement du nœud A_v est défini par la matrice colonne :

$$\Delta_v = \begin{bmatrix} \lambda_v \\ \omega_v \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda_v = \begin{bmatrix} \lambda_{v1} \\ \lambda_{v2} \\ \lambda_{v3} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \omega_v = \begin{bmatrix} \omega_{v1} \\ \omega_{v2} \\ \omega_{v3} \end{bmatrix}$$

Pour l'ensemble de la structure, l'état de déplacement est défini par la matrice colonne Δ dont les $6N$ éléments sont les éléments des matrices Δ_v rangées dans l'ordre 1, 2, ..., N :

$$\Delta = \text{Col}(\Delta_v)$$

L'ensemble des états de déplacements constitue un espace vectoriel $\mathcal{E}(\Delta)$ de dimension finie. À chaque liaison externe simple imposée à un nœud correspond une composante nulle du déplacement de ce nœud; donc $t + r_e$ composantes de déplacements sont nulles, et la dimension de $\mathcal{E}(\Delta)$ est $6N - (t + r_e)$.

Nous considérerons des ensembles de déplacements Δ_k (translations ou rotations) de nœuds A_k suivant les directions (directions des translations ou axes des rotations) d'un ensemble K :

$$K = \{A_k d_k^K; k = 1, 2, \dots, n\} \quad (13)$$

Un tel ensemble de déplacements est défini par la matrice colonne Δ_K d'éléments Δ_k .

Le **travail des forces extérieures** définies par la matrice F pour les déplacements définis par la matrice Δ a pour valeur :

$$\mathcal{G}_e = F^t \Delta$$

2.3 État de contrainte et état de déformation de la structure

2.3.1 État de contrainte et état de déformation d'un élément

Considérons un élément E^μ lié aux autres éléments ou aux appuis aux p^μ nœuds $A_\alpha^\mu, A_\beta^\mu, A_\gamma^\mu, \dots$ (nous écrivons A_α^μ au lieu de A_α pour rappeler que le nœud A_α appartient à l'élément E^μ).

L'état de contrainte de l'élément E^μ ne dépend que des forces $F_\alpha^\mu, F_\beta^\mu, F_\gamma^\mu, \dots$ qu'exercent les autres éléments ou les appuis sur E^μ aux nœuds $A_\alpha^\mu, A_\beta^\mu, A_\gamma^\mu, \dots$. Les $6p^\mu$ composantes de ces forces vérifient les six équations d'équilibre ; nous pouvons donc choisir six de ces composantes comme des réactions d'appui (soit considérer E^μ comme appuyé isostatiquement) et considérer les $6p^\mu - 6$ autres comme les éléments d'une matrice colonne C^μ qui définit l'état de contrainte de E^μ . Les équations d'équilibre se traduisent par la relation matricielle :

$$F^\mu = \begin{bmatrix} F_\alpha^\mu \\ F_\beta^\mu \\ F_\gamma^\mu \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_\alpha^\mu \\ U_\beta^\mu \\ U_\gamma^\mu \\ \dots \end{bmatrix} C^\mu = U^\mu C^\mu \quad (14)$$

$U_\alpha^\mu, U_\beta^\mu, U_\gamma^\mu, \dots$ sont des matrices auxiliaires de dimension $(6, 6p^\mu - 6)$ et U^μ est une matrice de dimension $(6p^\mu, 6p^\mu - 6)$.

L'état de déformation de l'élément E^μ ne dépend que des déplacements $\Delta_\alpha^\mu, \Delta_\beta^\mu, \Delta_\gamma^\mu, \dots$ des nœuds, et ne change pas si l'on ajoute aux déplacements des nœuds les déplacements $\delta_\alpha^\mu, \delta_\beta^\mu, \delta_\gamma^\mu, \dots$ résultant d'un déplacement d'ensemble de E^μ défini par six paramètres arbitraires. Nous pouvons donc choisir ce déplacement d'ensemble de façon à annuler six composantes des déplacements des nœuds de E^μ ; les $6p^\mu - 6$ autres composantes sont les éléments d'une matrice colonne D^μ qui définit la déformation de l'élément E^μ . Nous obtenons ainsi la relation matricielle :

$$D^\mu = [V_\alpha^\mu V_\beta^\mu V_\gamma^\mu \dots] \begin{bmatrix} \Delta_\alpha^\mu \\ \Delta_\beta^\mu \\ \Delta_\gamma^\mu \\ \dots \end{bmatrix} = V^\mu \Delta^\mu \quad (15)$$

$V_\alpha^\mu, V_\beta^\mu, V_\gamma^\mu, \dots$ sont des matrices de dimension $(6p^\mu - 6, 6)$, et V^μ est une matrice de dimension $(6p^\mu - 6, 6p^\mu)$.

Il est toujours possible, ayant choisi C^μ , de choisir D^μ de façon que :

$$(F^\mu)^t \Delta^\mu = (C^\mu)^t D^\mu \quad (16)$$

Il suffit en effet, pour déterminer D^μ , de choisir le déplacement d'ensemble qui permet d'annuler les déplacements des points d'application des réactions choisies pour définir C^μ .

Nous supposons toujours C^μ et D^μ choisis de façon que la relation (16) soit satisfaite.

Si nous remplaçons, dans la formule (16), F^μ par sa valeur (14), nous obtenons la relation :

$$(C^\mu)^t (U^\mu)^t \Delta^\mu = (C^\mu)^t D^\mu$$

vérifiée quel que soit C^μ ; la relation (15) peut donc s'écrire :

$$D^\mu = (U^\mu)^t \Delta^\mu \quad (17)$$

autrement dit, la matrice V^μ est la transposée de la matrice U^μ .

2.3.2 État de contrainte et état de déformation de la structure

Pour l'ensemble de la structure, l'état de contrainte et l'état de déformation sont définis par les matrices colonnes C et D qui résultent de la juxtaposition des matrices colonnes C^μ et D^μ rangées dans l'ordre 1, 2, ..., M :

$$C = \text{Col}(C^\mu), \quad D = \text{Col}(D^\mu)$$

L'ensemble des états de contrainte est un espace vectoriel $\mathcal{E}(C)$, et l'ensemble des états de déformation est un espace vectoriel $\mathcal{E}(D)$; ces deux espaces ont la même dimension Q :

$$Q = \sum_{\mu=1}^M (6p^\mu - 6)$$

Le **travail des contraintes** de l'état C pour les déformations de l'état D a pour valeur :

$$\mathcal{G}_i = C^t D$$

Cette relation définit une dualité entre les espaces $\mathcal{E}(C)$ et $\mathcal{E}(D)$.

2.4 Équations et formules fondamentales

2.4.1 Correspondance entre l'état de sollicitation et l'état de contrainte

Les équations nécessaires d'équilibre de la structure (S) établissent une correspondance entre les espaces vectoriels $\mathcal{E}(F)$ et $\mathcal{E}(C)$. L'équilibre du nœud A_v s'exprime, compte tenu de la relation (14), par l'équation :

$$F_v = \sum_{\mu} F_v^\mu = \sum_{\mu} U_v^\mu C^\mu$$

dans laquelle la sommation est étendue à tous les éléments E^μ assemblés au nœud A_v . L'ensemble des équations d'équilibre des nœuds équivaut à l'unique équation matricielle, dite **équation d'équilibre de la structure** :

$$F = U C \quad (18)$$

dans laquelle la matrice U a pour expression :

$$U = \begin{bmatrix} U_1^1 & U_1^2 & \dots & U_1^M \\ U_2^1 & U_2^2 & \dots & U_2^M \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_N^1 & U_N^2 & \dots & U_N^M \end{bmatrix}$$

La matrice U est une matrice de dimension $(6N, Q)$.

Tout état de contrainte qui vérifie l'équation d'équilibre (18) sera dit **statiquement admissible** avec F et noté C' .

Supposons l'état de sollicitation F connu (forces données et réactions).

— S'il n'existe qu'un seul état de contrainte statiquement admissible, la structure est dite **intérieurement isostatique**.

— S'il existe plusieurs états de contrainte statiquement admissibles, la structure est dite **intérieurement hyperstatique**. La différence de deux états de contrainte statiquement admissibles est un **état d'autocontrainte**, état de contrainte non nul en l'absence de sollicitation. L'ensemble des états d'autocontrainte est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}(C)$ dont la dimension r_i est le **degré d'hyperélasticité intérieure** de la structure.

Les éléments de la matrice F vérifiant t équations nécessaires d'équilibre, l'équation (18) équivaut à $6N - t$ équations linéaires indépendantes entre les Q éléments de la matrice C . Il faut donc, pour que la structure ne puisse se déplacer à la façon d'un mécanisme, que l'on ait $Q > 6N - t$.

— Si $Q = 6N - t$, la structure est intérieurement isostatique.

— Si $Q = 6N - t + r_i$, la structure est intérieurement hyperstatique de degré r_i .

2.4.2 Correspondance entre l'état de déplacement et l'état de déformation

La relation (17) qui donne la déformation de l'élément E^μ peut s'écrire :

$$D^\mu = \sum_{\nu} (U_{\nu}^{\mu})^t \Delta_{\nu}$$

la sommation étant étendue à tous les nœuds appartenant à E^μ . L'ensemble des relations précédentes, écrites pour $\mu = 1, 2, \dots, N$, équivaut à la seule relation matricielle, dite **équation de continuité de la structure** :

$$D = U^t \Delta \quad (19)$$

Il n'existe pas en général d'état de déplacement Δ correspondant à un état de déformation D arbitrairement choisi. Un état de déformation, pour lequel il existe un état de déplacement Δ , sera dit **cinématiquement admissible** avec Δ et sera noté D'' . Un état de déformation cinématiquement admissible vérifie des *conditions de compatibilité* qu'il est aisé d'établir. En effet, la relation (19) montre que les Q éléments de la matrice D sont des fonctions linéaires et homogènes des éléments de la matrice Δ . Lorsque la structure est extérieurement hyperstatique, la matrice Δ a $6N - (t + r_e)$ éléments non nuls. Il en résulte que les éléments de la matrice D vérifient :

$$Q + (t + r_e) - 6N = r_e + r_i = r$$

relations *linéaires et homogènes* ; $r = r_i + r_e$ est le **degré d'hyperstativité** (ou d'indétermination cinématique) de la structure.

Lorsque la structure est isostatique, un état de déformation choisi arbitrairement est toujours cinématiquement admissible.

Remarque : Si l'on se donne seulement n déplacements Δ_k ($n < 6N - t - r$), il existe une infinité d'états de déformation cinématiquement admissibles avec ces déplacements.

2.4.3 Théorème des travaux virtuels. Applications

Soit C' un état de contrainte statiquement admissible avec l'état de sollicitation F , et D'' l'état de déformation cinématiquement admissible avec l'état de déplacement Δ ; les relations :

$$F = U C' \quad \text{et} \quad D'' = U^t \Delta$$

ont pour conséquence le **théorème des travaux virtuels** :

$$F^t \Delta = C'^t D''$$

Dans le travail des forces extérieures, nous pouvons négliger les réactions qui ne travaillent pas en vertu des hypothèses faites sur les liaisons. Donc, dans le cas de forces extérieures F_j éléments d'une matrice F_J , si Δ_j sont les déplacements suivant l'ensemble J des lignes d'action des forces, le théorème des travaux virtuels s'écrit :

$$\sum_j F_j \Delta_j = F_J^t \Delta_J = C'^t D'' \quad (20)$$

C' étant un état de contrainte statiquement admissible avec les forces F_j , et D'' un état de déformation cinématiquement admissible avec les déplacements Δ_j .

Voici deux **conséquences** de la relation (20).

— Une structure (S) est soumise à une sollicitation quelconque qui provoque un état de déformation D . Pour calculer le déplacement Δ_k suivant $A_k d_k$, nous appliquons une *force unité* suivant $A_k d_k$ et nous désignons par C'_k un état de déplacement statiquement admissible avec cette seule force ; la relation (20) s'écrit :

$$\Delta_k = C'_k D$$

Il en résulte que la matrice Δ_K , dont les éléments sont les déplacements Δ_k suivant les directions d'un ensemble K défini par la formule (13), a pour expression :

$$\Delta_K = C'_K{}^t D \quad \text{avec} \quad C'_K = [C'_1 \ C'_2 \ \dots \ C'_n] \quad (21)$$

— Une structure (S) est soumise à des forces données F_j agissant suivant les directions d'un ensemble J défini par la formule (12), et soit C l'état de contrainte de la structure. Pour calculer F_j , nous imposons à la structure un seul *déplacement unité* suivant la direction de la force F_j , et nous désignons par D''_j un état de déformation cinématiquement admissible avec ce déplacement ; la relation (20) s'écrit :

$$F_j = D''_j{}^t C$$

Il en résulte que la matrice F_J a pour expression :

$$F_J = D''_J{}^t C \quad \text{avec} \quad D''_J = [D''_1 \ D''_2 \ \dots \ D''_m] \quad (22)$$

Une conséquence immédiate des formules (21) et (22) est :

$$C_J^t D''_J = I$$

2.5 Structures élastiques (S)

2.5.1 Définitions

Une structure (S) est élastique lorsque tous ses éléments sont élastiques. Un élément E^μ est élastique lorsque les matrices C^μ et D^μ qui définissent l'état de contrainte et l'état de déformation sont liées par les relations équivalentes :

$$D^\mu = k^\mu C^\mu \quad \text{ou} \quad C^\mu = r^\mu D^\mu$$

k^μ et r^μ sont des matrices régulières symétriques d'ordre $6p^\mu - 6$ appelées **matrice d'élasticité** et **matrice de rigidité** de l'élément E^μ ; elles sont inverses l'une de l'autre.

Il en résulte que les matrices C et D qui définissent l'état de contrainte et l'état de déformation d'une structure élastique (S) sont liées par les relations équivalentes :

$$D = k C \quad \text{ou} \quad C = r D \quad (23)$$

dans lesquelles les matrices k et r diagonales par blocs :

$$k = \text{Diag} (k^\mu), \quad r = \text{Diag} (r^\mu)$$

sont la **matrice d'élasticité** et la **matrice de rigidité** de la structure ; elles sont inverses l'une de l'autre :

$$kr = I$$

Le potentiel W de la structure élastique (S) a pour expressions :

$$W = \frac{1}{2} C^t D = \frac{1}{2} D^t C = \frac{1}{2} C^t k C = \frac{1}{2} D^t r D$$

2.5.2 Expressions des déplacements. Matrices de souplesse

Dans le cas où la structure (S) est élastique, la formule (21) s'écrit :

$$\Delta_K = C_K^t k C \quad (24)$$

Supposons la structure sollicitée par un ensemble de forces F_J agissant suivant les directions d'un ensemble J défini par la formule (12), et soit C_J l'état de contrainte de la structure soumise à la seule force unité dirigée suivant F_J . L'état de contrainte de la structure a pour expression, F_J désignant la matrice colonne d'éléments F_j :

$$C = C_J F_J \quad \text{avec} \quad C_J = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_m]$$

Si l'on reporte la valeur de C dans la formule (24), nous obtenons la relation :

$$\Delta_K = \mathcal{H}_{KJ} F_J \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}_{KJ} = C_K^t k C_J$$

\mathcal{H}_{KJ} est une matrice (n, m) , appelée **matrice de souplesse** de la structure relativement aux ensembles J et K pris dans cet ordre ; comme on peut, dans l'expression de \mathcal{H}_{KJ} , prendre pour matrice C_K la matrice C_K des états de contrainte réels, on voit que :

$$\mathcal{H}_{JK} = \mathcal{H}_{KJ}^t \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{JJ} = \mathcal{H}_{JJ}^t$$

2.5.3 Expressions des forces. Matrices de raideur

Dans le cas où la structure (S) est élastique, la formule (22) s'écrit :

$$F_J = D_J^t r D \quad (25)$$

Supposons qu'on impose à la structure des déplacements Δ_j suivant les directions d'un ensemble J défini par la formule (12) en lui appliquant des forces F_j suivant les directions de l'ensemble J , et soit D_j l'état de déformation de la structure sous l'effet d'un seul déplacement $\Delta_j = 1$. L'état de déformation de la structure a pour expression, Δ_j désignant la matrice colonne d'éléments Δ_j :

$$D = D_J \Delta_J \quad \text{avec} \quad D_J = [D_1 \ D_2 \ \dots \ D_m]$$

Si l'on reporte la valeur de D dans la formule (25), on obtient la relation :

$$F_J = \mathcal{R}_{JJ} \Delta_J \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_{JJ} = D_J^t r D_J$$

\mathcal{R}_{JJ} est une matrice symétrique d'ordre m , appelée **matrice de raideur** ; il est facile de montrer que :

$$\mathcal{R}_{JJ} = \mathcal{H}_{JJ}^{-1}$$

2.6 Exemples de structures élastiques (S)

2.6.1 Formule préliminaire

Les matrices C^μ et D^μ se définissent simplement dans un repère orthonormé $O'x'_1x'_2x'_3$ lié à l'élément E^μ . Il est facile, dans ce repère, de déterminer la matrice U'^μ telle que :

$$F'^\mu = U'^\mu C^\mu$$

Soit Ω_0 la matrice orthogonale qui permet de passer du repère général au repère $O'x'_1x'_2x'_3$: un même vecteur est défini par la matrice colonne V dans le repère général $Ox_1x_2x_3$ et par la matrice colonne $V' = \Omega_0 V$ dans le repère lié à l'élément. Il en résulte qu'il existe une matrice orthogonale Ω , composée de blocs diagonaux Ω_0 , telle que $F'^\mu = \Omega F^\mu$. Nous en déduisons la formule :

$$U^\mu = \Omega^t U'^\mu \quad (26)$$

2.6.2 Structures réticulées

Les structures réticulées sont composées de barres assemblées en leurs extrémités par des articulations. Un élément E^μ de la structure est une barre $A_i A_j$ de longueur L et de section S (figure 5).

Dans ce cas très simple, l'effort normal N dans la barre définit l'état de contrainte, et le raccourcissement λ de la barre définit l'état de déformation :

$$C^\mu = N \quad \text{et} \quad D^\mu = \lambda$$

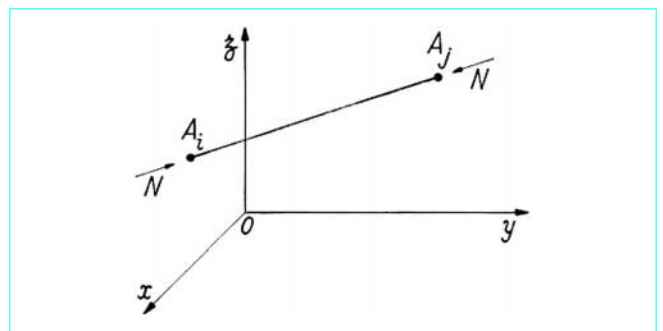


Figure 5 – Barre d'une structure réticulée

La formule classique $\lambda = NL/ES$ (E module d'Young) montre que la matrice d'élasticité et la matrice de rigidité de l'élément sont des scalaires :

$$k^\mu = \frac{L}{ES} \quad \text{et} \quad r^\mu = \frac{ES}{L}$$

Il n'est pas nécessaire, dans ce cas simple, de recourir à la formule (26) pour déterminer la matrice U^μ . En effet, si nous désignons par u_{ij} et u_{ji} les matrices colonnes qui représentent les vecteurs unités dirigés suivant $\overrightarrow{A_i A_j}$ et $\overrightarrow{A_j A_i}$ ($u_{ij} + u_{ji} = 0$), l'équilibre des nœuds A_i et A_j s'écrit :

$$F_i^\mu = Nu_{ij} \quad \text{et} \quad F_j^\mu = Nu_{ji}$$

$$\text{soit} \quad F^\mu = U^\mu C^\mu \quad \text{avec} \quad U^\mu = \begin{bmatrix} u_{ij} \\ u_{ji} \end{bmatrix}$$

2.6.3 Structures composées de poutres droites assemblées rigidement

Les éléments de la structure sont des poutres droites assemblées rigidement aux nœuds. Nous supposons que les axes centraux d'inertie des sections d'une même poutre restent parallèles à deux directions fixes. Le repère $A_i x' y' z'$ lié à l'élément E^μ constitué par la poutre $A_i A_j$ est ainsi défini : $A_i x'$ est dirigé suivant la fibre moyenne $A_i A_j$; $A_i y'$ et $A_i z'$ sont parallèles aux axes centraux d'inertie des sections de la poutre (figure 6).

Imposons à la poutre $A_i A_j$ les liaisons suivantes : A_j est une articulation fixe à cardan ne permettant pas les rotations autour de $A_i x'$; A_i est une rotule astreinte à se déplacer sur $A_i x'$.

Les éléments de la matrice C^μ sont :

- les couples Γ_i et Γ_j d'axes parallèles à $A_i y'$, qui s'exercent sur A_i et A_j ;
- les couples Γ'_i et Γ'_j d'axes parallèles à $A_i z'$, qui s'exercent sur A_i et A_j ;
- le couple Γ d'axe dirigé suivant $A_i x'$ et la force N dirigée suivant $A_i x'$, qui s'exercent sur A_i .

Les éléments de la matrice D^μ sont :

- les rotations ω_i et ω_j des extrémités A_i et A_j autour d'axes parallèles à $A_i y'$;
- les rotations ω'_i et ω'_j des extrémités A_i et A_j autour d'axes parallèles à $A_i z'$;
- la rotation θ autour de $A_i x'$ et le déplacement λ suivant $A_i x'$ de l'extrémité A_j .

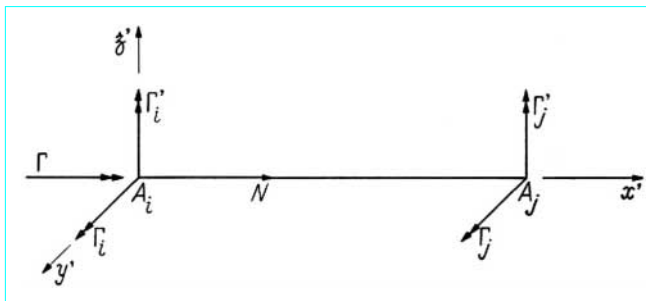


Figure 6 – Poutre droite d'une structure

Donc :

$$C^\mu = [\Gamma_i \Gamma_j \Gamma'_i \Gamma'_j \Gamma N]^t \quad \text{et} \quad D^\mu = [\omega_i \omega_j \omega'_i \omega'_j \theta \lambda]$$

Désignons par :

- a, b et c les coefficients de souplesse de la poutre fléchie dans le plan $A_i x' z'$;
- a', b' et c' les coefficients de souplesse de la poutre fléchie dans le plan $A_i x' y'$;
- d la rotation de l'extrémité A_j sous l'effet d'un couple unité, d'axe dirigé suivant $A_i x'$;
- d' le déplacement de l'extrémité A_j sous l'effet d'une force unité dirigée suivant $A_i x'$.

Les formules classiques de résistance des matériaux :

$$\begin{aligned} \omega_i &= a \Gamma_i - b \Gamma_j & \omega_j &= -b \Gamma_i + c \Gamma_j \\ \omega'_i &= a' \Gamma'_i - b' \Gamma'_j & \omega'_j &= -b' \Gamma'_i + c' \Gamma'_j \\ \theta &= d \Gamma & \lambda &= d' N \end{aligned}$$

montrent que la matrice d'élasticité de l'élément a pour expression :

$$k^\mu = \begin{bmatrix} a & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b' & c' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d' \end{bmatrix}$$

Lorsque la poutre de longueur L est de section constante S :

$$\begin{aligned} a = c &= \frac{L}{3EI}, & b &= \frac{L}{6EI}, & d &= \frac{L}{GK} \\ a' = c' &= \frac{L}{3EI'}, & b' &= \frac{L}{6EI'}, & d' &= \frac{L}{ES} \end{aligned}$$

EI, EI' et GK désignant les rigidités à la flexion et la rigidité à la torsion.

Les forces appliquées aux nœuds A_i et A_j de la poutre $A_i A_j$ sont définies par :

$$F_i^\mu = [X'_i Y'_i Z'_i P'_i Q'_i R'_i]^t$$

$$F_j^\mu = [X'_j Y'_j Z'_j P'_j Q'_j R'_j]^t$$

avec X'_i, Y'_i, Z'_i et P'_i, Q'_i, R'_i composantes de la résultante générale et du moment résultant du système des forces appliquées au nœud A_i de la poutre $A_i A_j$.

Les équations d'équilibre de la poutre et la définition de la matrice C^μ donnent les relations :

$$\begin{aligned} X'_i &= N & X'_j &= -N \\ Y'_i &= (\Gamma'_i + \Gamma'_j)/L & Y'_j &= -(\Gamma'_i + \Gamma'_j)/L \\ Z'_i &= -(\Gamma_i + \Gamma_j)/L & Z'_j &= (\Gamma_i + \Gamma_j)/L \\ P'_i &= \Gamma & P'_j &= -\Gamma \\ Q'_i &= \Gamma_i & Q'_j &= \Gamma_j \\ R'_i &= \Gamma'_i & R'_j &= \Gamma'_j \end{aligned}$$

équivalentes à l'unique relation matricielle :

$$F^\mu = U^\mu C^\mu$$

La matrice U'^μ a donc pour expression :

$$U'^\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & L^{-1} & L^{-1} & 0 & 0 \\ -L^{-1} & -L^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -L^{-1} & -L^{-1} & 0 & 0 \\ L^{-1} & L^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.6.4 Structures composées de raidisseurs et de panneaux cisailés

Ce sont des structures composées de panneaux en tôle mince, rectangulaires ou trapézoïdaux, assemblés entre eux par l'intermédiaire de raidisseurs eux-mêmes assemblés aux nœuds de la structure. De telles structures se rencontrent en particulier dans la construction aéronautique.

Le calcul de ces structures est fondé sur les deux hypothèses simplificatrices suivantes, d'autant plus voisines de la réalité que l'épaisseur des tôles constituant les panneaux est plus faible :

- les panneaux ne sont soumis qu'à des efforts de cisaillement le long de leurs bords ;
- les raidisseurs ne supportent que des efforts normaux ; les nœuds ne sont soumis qu'à des forces, à l'exclusion de couples.

2.6.4.1 Élément panneau

Soit un panneau rectangulaire (figure 7) de côtés a et b , d'épaisseur e et de surface $\Omega = ab$. L'état de contrainte du panneau est défini par l'effort de cisaillement par unité de longueur sur le contour, donc $C^\mu = t = \tau e$.

Le travail des contraintes étant (§ 2.3.2), γ désignant le glissement provoqué par la contrainte τ :

$$\mathcal{C}_i = (C^\mu)^t D^\mu = 2 \gamma \tau \Omega e = (\tau e) 2 \gamma \Omega$$

la déformation du panneau est définie par $D^\mu = 2 \gamma \Omega$.

La loi de l'élasticité $\tau = 2G\gamma$ (G module d'élasticité transversal) montre que la matrice d'élasticité et la matrice de rigidité du panneau sont les scalaires :

$$k^\mu = \frac{\Omega}{Ge}, \quad r^\mu = \frac{Ge}{\Omega}$$

Ces formules s'étendent aisément aux panneaux trapézoïdaux.

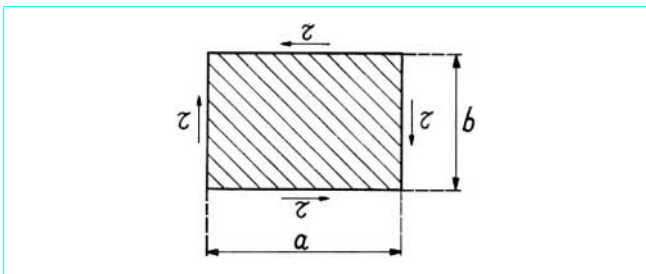


Figure 7 – Élément panneau

2.6.4.2 Élément raidisseur

L'état de contrainte d'un raidisseur $A_i A_j$ (figure 8) est défini par les efforts normaux N_i et N_j en A_i et A_j ; l'état de déformation est défini par le déplacement δ_i de A_i suivant $\overrightarrow{A_i A_j}$ et le déplacement δ_j de A_j suivant $\overrightarrow{A_j A_i}$:

$$C^\mu = [N_i \ N_j], \quad D^\mu = [\delta_i \ \delta_j]$$

On peut montrer que, si L et S désignent la longueur et la section du raidisseur, la matrice d'élasticité et la matrice de rigidité sont :

$$k^\mu = \frac{L}{6ES} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad r^\mu = \frac{2ES}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

2.6.4.3 Degré d'hyperstaticité intérieure de la structure

Soit p le nombre des panneaux, q le nombre des raidisseurs et n le nombre des nœuds. L'état de contrainte de la structure est défini par $p + 2q$ composantes. En supposant la structure spatiale, nous avons trois équations d'équilibre par nœud et une équation d'équilibre par raidisseur (la différence des efforts normaux aux extrémités du raidisseur est égale à la résultante des efforts de cisaillement exercés par les panneaux assemblés sur le raidisseur). Nous avons donc $3n + q$ équations d'équilibre, dont les six équations d'équilibre des forces extérieures appliquées à la structure sont une conséquence. Le degré d'hyperstaticité intérieure de la structure est donc :

$$r_i = p + 2q - (3n + q - 6) = p + q - 3n + 6$$

2.7 Méthode des forces

■ **Premier problème : déterminer l'état de contrainte de la structure (S) connaissant les forces extérieures appliquées à la structure**

Soit F_j la matrice colonne des forces données F_j appliquées à la structure suivant les directions de l'ensemble J défini par la formule (12). Lorsque la structure est isostatique, l'équation d'équilibre (18) permet de déterminer les réactions d'appui et l'état de contrainte.

Supposons donc la structure (S) r fois hyperstatique, et associons à (S) une structure isostatique (S_0) en supprimant r liaisons simples dans (S). L'état de contrainte de (S) est identique à celui de (S_0) soumise aux forces F_j et aux réactions X_i ($i = 1, 2, \dots, r$) qu'exerçaient les liaisons supprimées. Les **réactions hyperstatiques** X_i agissent suivant les directions d'un ensemble :

$$I = \{A_i d_i^I; i = 1, 2, \dots, r\}$$

et peuvent être représentées par une matrice colonne X_I d'éléments X_{Ij} .

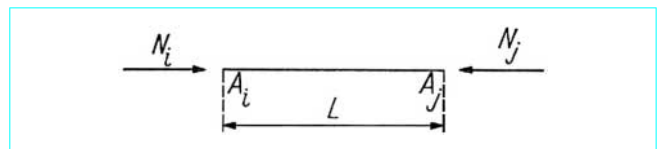


Figure 8 – Élément raidisseur

Un état de contrainte statiquement admissible de (S) a pour expression :

$$C' = \sum_{j=1}^m C_{0j} F_j + \sum_{i=1}^r C_{0i} X_i$$

C_{0j} et C_{0i} désignant les états de contrainte de la structure isostatique (S_0) soumise à la seule force unité $F_j = 1$ et à la seule force unité $X_i = 1$. En définissant les matrices C_{0I} et C_{0J} relatives à la structure (S_0) :

$$C_{0I} = [C_{01} \ C_{02} \ \dots \ C_{0r}], \quad C_{0J} = [C_{01} \ C_{02} \ \dots \ C_{0m}]$$

nous pouvons écrire :

$$C' = C_{0J} F_J + C_{0I} X_I \quad (27)$$

La *méthode des forces* consiste à déterminer la matrice inconnue X_I ; pour cela écrivons que les déplacements de (S_0) suivant les directions de l'ensemble I sont nuls, soit, en utilisant la formule (24) :

$$\Delta_I = C_{0I}^t k C' = 0$$

Cette équation exprime que l'état de déformation $D' = k C'$ est cinématiquement admissible. En remplaçant C' par son expression (27), nous obtenons l'équation :

$$G_{II} X_I + G_{IJ} F_J = 0 \quad (28)$$

dans laquelle :

$$G_{II} = C_{0I}^t k C_{0I}, \quad G_{IJ} = C_{0I}^t k C_{0J}$$

G_{II} est une matrice symétrique régulière d'ordre r , car $\frac{1}{2} X_I^t G_{II} X_I$ est le potentiel de la structure (S_0) soumise aux forces X_I :

$$W = \frac{1}{2} (C_{0I} X_I)^t k (C_{0I} X_I) = \frac{1}{2} X_I^t G_{II} X_I$$

Nous pouvons donc résoudre l'équation (28) :

$$X_I = -G_{II}^{-1} G_{IJ} F_J$$

et en reportant la valeur obtenue dans la relation (27), nous trouvons la formule :

$$C = C_J F_J \quad \text{avec} \quad C_J = C_{0J} - C_{0I} G_{II}^{-1} G_{IJ} \quad (29)$$

■ Deuxième problème : calculer les déplacements de la structure (S) connaissant les forces extérieures appliquées à la structure

La matrice Δ_K des déplacements de la structure suivant les directions de l'ensemble K [formule (13)] est donnée par la formule (24) :

$$\Delta_K = C_{0K}^t k C$$

soit, en remplaçant C par son expression (29) :

$$\Delta_K = \mathcal{H}_{KJ} F_J \quad \text{avec} \quad \mathcal{H}_{KJ} = G_{KJ} - G_{KI} G_{II}^{-1} G_{IJ} \quad (30)$$

Dans l'expression de la **matrice de souplesse** \mathcal{H}_{KJ} :

$$G_{KJ} = C_{0K}^t k C_{0J} \quad \text{et} \quad G_{KI} = C_{0K}^t k C_{0I}$$

Il est immédiat de vérifier que :

$$\mathcal{H}_{JK} = \mathcal{H}_{KJ}^t \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_{JJ} = \mathcal{H}_{JJ}^t$$

En outre, la matrice symétrique \mathcal{H}_{JJ} est régulière, car $\frac{1}{2} F_J^t \mathcal{H}_{JJ} F_J$ est le potentiel de la structure (S) soumise aux forces F_J .

Lorsque la structure (S) est isostatique, la matrice de souplesse \mathcal{H}_{KJ} se réduit à la matrice G_{KJ} .

■ Troisième problème : déterminer les forces qu'il faut appliquer à une structure (S) pour maintenir des déplacements donnés

Soit Δ_K la matrice des déplacements donnés suivant les directions d'un ensemble K [formule (13)]. Pour obtenir ces déplacements en appliquant à la structure des forces F_J , éléments de la matrice F_J suivant les directions d'un ensemble J [formule (12)], il faut que les m valeurs F_J vérifient les équations :

$$\Delta_K = \mathcal{H}_{KK} F_J$$

Il faut donc que $m \geq n$. Dans le cas général, le problème a une seule solution si $m = n$, et une infinité de solutions si $m > n$.

Si l'on prend pour ensemble J l'ensemble K , le problème a toujours une solution unique, puisque la matrice \mathcal{H}_{KK} est régulière :

$$\Delta_K = \mathcal{H}_{KK} F_K \quad \text{donc} \quad F_K = \mathcal{H}_{KK}^{-1} \Delta_K$$

■ Quatrième problème : déterminer les états de contrainte, de déformation et de déplacement d'une structure (S) soumise à une déformation imposée

Une déformation imposée \bar{D} peut résulter de phénomènes extérieurs tels que la dilatation thermique ou le retrait. Elle peut également résulter du mode de réalisation de l'ouvrage ; c'est le cas d'une structure réticulée dont les barres sont trop longues ou trop courtes avant assemblage.

Pour chaque élément E^μ de la structure (S), la déformation imposée \bar{D}^μ est calculée comme si l'élément était libre dans l'espace.

La déformation imposée \bar{D} provoque un état d'autocontrainte (§ 2.4.1), donc un état de contrainte nul dans le cas d'une structure isostatique. Supposons donc la structure (S) hyperstatique ; son état de contrainte et son état de déformation sont de la forme :

$$C = C_{0I} X_I \quad \text{et} \quad D = \bar{D} + kC = \bar{D} + k C_{0I} X_I$$

Pour déterminer X_I , nous appliquons la formule (24) à la structure isostatique associée (S_0), qui permet de définir les réactions hyperstatiques :

$$\Delta_I = C_{0I}^t D = C_{0I}^t (\bar{D} + k C_{0I} X_I) = 0$$

Nous obtenons ainsi l'équation qui permet de calculer X_I :

$$G_{II} X_I + C_{0I}^t \bar{D} = 0 \quad (31)$$

Nous trouvons donc :

$$\left. \begin{aligned} C &= -C_{0I} G_{II}^{-1} C_{0I}^t \bar{D} \\ D &= \bar{D} - k C_{0I} G_{II}^{-1} C_{0I}^t \bar{D} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

La première formule (32) montre que l'état de contrainte de (S) est nul lorsque $C_{0I}^t \bar{D} = 0$, donc lorsque l'état de déformation imposé \bar{D} est cinématiquement admissible.

Pour calculer les déplacements Δ_k suivant les directions d'un ensemble K [formule (13)] sous l'effet de la déformation imposée \bar{D} , nous utilisons la formule (24) :

$$\Delta_K = C_{0K}^t D = C_{0K}^t (\bar{D} - k C_{0I} G_{II}^{-1} C_{0I}^t \bar{D})$$

En tenant compte de la définition de la matrice G_{KI} et de l'expression (29) de la matrice C_K , nous parvenons à la formule simple :

$$\Delta_K = C_K^t \bar{D} \quad (33)$$

que l'on pourrait établir au moyen du théorème de réciprocité de Colonnetti (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le présent traité).

■ Structures (S) sollicitées en dehors des nœuds

Considérons une structure (S) soumise à un ensemble de forces extérieures (Φ) appliquées aux éléments de cette structure en dehors des nœuds. L'état d'équilibre de la structure résulte de la superposition de l'état local d'équilibre et de l'état général d'équilibre définis ci-après.

L'état local d'équilibre est l'état d'équilibre de la structure soumise aux forces (Φ) lorsqu'on impose à la structure des liaisons supplémentaires qui empêchent tous les déplacements des nœuds. Dans l'état local d'équilibre, l'élément E^μ exerce sur le nœud A_v un système de forces défini par une matrice colonne F_v^μ ; l'ensemble des éléments assemblés au nœud A_v exerce sur ce nœud un système de forces défini par la matrice colonne :

$$F_v = \sum_{\mu} F_v^\mu$$

la sommation étant étendue à l'ensemble des éléments assemblés en A_v .

L'état général d'équilibre est l'état d'équilibre de la structure soumise aux forces extérieures appliquées aux nœuds, représentées par les matrices colonnes F_v définies précédemment.

En effet, l'état local d'équilibre est l'état d'équilibre de la structure soumise aux forces (Φ) et aux réactions $-F_v$ exercées par les nœuds fixés par les liaisons supplémentaires.

2.8 Méthode des déplacements

■ Premier problème : déterminer l'état de déformation et l'état de contrainte d'une structure (S) soumise à des déplacements imposés

Soit Δ_K la matrice des déplacements imposés Δ_k suivant les directions d'un ensemble K [formule (13)]. Nous supposons, pour que le problème ait une solution unique (§ 2.7), que les déplacements sont maintenus par des forces agissant suivant les directions de l'ensemble K .

Lorsque les déplacements imposés définissent l'état de déplacement, la relation (19) donne l'état de déformation D , donc l'état de contrainte $C = rD$; on dit que la structure est **cinématiquement déterminée**.

Supposons donc la structure **cinématiquement indéterminée** ; nous pouvons associer à (S) une structure cinématiquement déterminée (S_1) en imposant à (S) s liaisons supplémentaires ; s est le *degré d'indétermination cinématique*. L'état de déformation de (S) est identique à celui de la structure (S_1) à laquelle on impose les déplacements Δ_k et, en outre, les déplacements inconnus Y_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, s$), éléments d'une matrice colonne Y_L ; ces déplacements ont lieu suivant les directions d'un ensemble :

$$L = \{A_\ell d_\ell^t ; \ell = 1, 2, \dots, s\}$$

Donc, si D_{1K} est l'état unique de déformation de (S_1) sous l'effet du seul déplacement $\Delta_k = 1$ et si $D_{1\ell}$ est l'état unique de déformation de (S_1) sous l'effet du seul déplacement $Y_\ell = 1$, les états de déformation cinématiquement admissibles de la structure (S) ont pour expression :

$$D'' = \sum_{k=1}^n D_{1K} \Delta_k + \sum_{\ell=1}^s D_{1\ell} Y_\ell$$

soit

$$D'' = D_{1K} \Delta_K + D_{1L} Y_L \quad (34)$$

D_{1K} et D_{1L} désignant les matrices :

$$D_{1K} = [D_{11} \ D_{12} \ \dots \ D_{1n}] \quad \text{et} \quad D_{1L} = [D_{11} \ D_{12} \ \dots \ D_{1s}]$$

La *méthode des déplacements* consiste à déterminer la matrice Y_L des déplacements inconnus. Pour cela, écrivons que les forces appliquées à (S_1) suivant les directions de l'ensemble L sont nulles, soit en utilisant la formule (25) :

$$F_L = D_{1L}^t r D'' = 0$$

Cette équation exprime que l'état de contrainte $C'' = rD''$ est statiquement admissible. En remplaçant D'' par son expression (34), nous obtenons l'équation :

$$H_{LL} Y_L + H_{LK} \Delta_K = 0 \quad (35)$$

dans laquelle :

$$H_{LL} = D_{1L}^t r D_{1L} \quad \text{et} \quad H_{LK} = D_{1L}^t r D_{1K}$$

H_{LL} est une matrice symétrique régulière d'ordre s , car $\frac{1}{2} Y_L^t H_{LL} Y_L$ est le potentiel de (S_1) sous l'effet des déplacements Y_ℓ :

$$W = \frac{1}{2} (D_{1L} Y_L)^t r (D_{1L} Y_L) = \frac{1}{2} Y_L^t H_{LL} Y_L$$

Nous pouvons donc résoudre l'équation (35) :

$$Y_L = -H_{LL}^{-1} H_{LK} \Delta_K$$

et, en reportant la valeur obtenue dans (34), nous obtenons la formule :

$$D = D_K \Delta_K \quad \text{avec} \quad D_K = D_{1K} - D_{1L} H_{LL}^{-1} H_{LK} \quad (36)$$

■ Deuxième problème : déterminer les forces qu'il faut appliquer à la structure (S) pour maintenir les déplacements imposés

La formule (25) nous donne la matrice F_K des forces F_k qu'il faut appliquer à (S) pour maintenir les déplacements imposés Δ_k :

$$F_K = D_{1K}^t r D$$

soit, en remplaçant D par son expression (36) :

$$F_K = \mathcal{R}_{KK} \Delta_K \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_{KK} = H_{KK} - H_{KL} H_{LL}^{-1} H_{LK} \quad (37)$$

Dans l'expression de la **matrice de raideur** \mathcal{R}_{KK} :

$$H_{KK} = D_{1K}^t r D_{1K}$$

La matrice de raideur \mathcal{R}_{KK} est une matrice régulière symétrique, inverse de la matrice de souplesse \mathcal{H}_{KK} (§ 2.7). Lorsque la structure (S) est cinématiquement déterminée (§ 2.8), la matrice de souplesse se réduit à la matrice H_{KK} .

■ **Troisième problème : déterminer l'état de contrainte de la structure (S) connaissant les forces extérieures appliquées à la structure**

Soit F_J la matrice des forces extérieures appliquées à la structure (S) suivant les directions d'un ensemble J [formule (12)]. La formule (37) nous donne la matrice de raideur \mathcal{R}_{JJ} , donc :

$$\Delta_J = \mathcal{R}_{JJ}^{-1} F_J$$

La formule (36) donne ensuite l'état de déformation de la structure :

$$D = D_J \Delta_J = D_J \mathcal{R}_{JJ}^{-1} F_J$$

Enfin, l'état de contrainte de la structure est donné par $C = rD$.

2.9 Méthode des déplacements déduite des matrices de rigidité généralisées

2.9.1 Matrice de rigidité généralisée d'un élément

Des relations (14), (23) et (17) relatives à l'élément E^μ :

$$F^\mu = U^\mu C^\mu, \quad C^\mu = r^\mu D^\mu, \quad D^\mu = (U^\mu)^t \Delta^\mu$$

nous déduisons la relation :

$$F^\mu = R^\mu \Delta^\mu \quad \text{avec} \quad R^\mu = U^\mu r^\mu (U^\mu)^t \quad (38)$$

La matrice symétrique R^μ est la **matrice de rigidité généralisée** de l'élément E^μ ; elle est *singulière* puisque les éléments de la matrice F^μ vérifient les six équations d'équilibre de l'élément E^μ . La relation (38) peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} F_{\alpha}^{\mu} \\ F_{\beta}^{\mu} \\ F_{\gamma}^{\mu} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\alpha\alpha}^{\mu} & R_{\alpha\beta}^{\mu} & R_{\alpha\gamma}^{\mu} & \dots \\ R_{\beta\alpha}^{\mu} & R_{\beta\beta}^{\mu} & R_{\beta\gamma}^{\mu} & \dots \\ R_{\gamma\alpha}^{\mu} & R_{\gamma\beta}^{\mu} & R_{\gamma\gamma}^{\mu} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{\alpha}^{\mu} \\ \Delta_{\beta}^{\mu} \\ \Delta_{\gamma}^{\mu} \\ \dots \end{bmatrix}$$

Les sous-matrices vérifient, quels que soient les nœuds A_α et A_β , les relations :

$$R_{\alpha\beta}^{\mu} = (R_{\beta\alpha}^{\mu})^t \quad \text{et} \quad R_{\alpha\alpha}^{\mu} = (R_{\alpha\alpha}^{\mu})^t$$

Il en résulte que la matrice colonne F_v^μ , dont les éléments sont les composantes des forces exercées sur l'élément E^μ au nœud A_v par les autres éléments ou les appuis, a pour expression :

$$F_v^\mu = \sum_{\alpha} R_{v\alpha}^{\mu} \Delta_{\alpha} \quad (39)$$

la sommation étant étendue à tous les nœuds de l'élément E^μ .

2.9.2 Structure soumise à des forces appliquées aux nœuds

On choisit comme inconnues les composantes des déplacements des nœuds. Les conditions aux limites, qui s'expriment par la nullité de certaines composantes de déplacements, sont donc automatiquement vérifiées. Les équations d'équilibre des nœuds, dans lesquelles on ne prend en compte que les composantes des forces données qui ne sont pas directement équilibrées par les réactions

d'appui, sont, en désignant par F_v la matrice colonne dont les éléments sont les composantes des forces données appliquées au nœud A_v :

$$\sum_{\mu} F_v^\mu = F_v$$

la sommation étant étendue à tous les éléments ayant en commun le nœud A_v .

En remplaçant F_v^μ par son expression (39) et en intervertissant l'ordre des sommations :

$$\sum_{\alpha} \left(\sum_{\mu} R_{v\alpha}^{\mu} \right) \Delta_{\alpha} = F_v$$

Définissons la matrice $R_{v\alpha}$ par :

$$R_{v\alpha} = \sum_{\mu} R_{v\alpha}^{\mu}$$

la sommation étant étendue à tous les éléments ayant en commun les nœuds A_v et A_α ; nous avons :

$$R_{\alpha v} = R_{v\alpha}^t$$

et les équations d'équilibre des nœuds s'écrivent :

$$\sum_{\alpha} R_{v\alpha} \Delta_{\alpha} = F_v \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

et sont équivalentes à l'unique équation matricielle :

$$R \Delta = F \quad (40)$$

R désignant la **matrice de raideur de l'ensemble de la structure** :

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

La matrice R est une matrice symétrique *régulière*, car $\frac{1}{2} \Delta^t R \Delta$ est le potentiel de la structure à laquelle on impose les déplacements définis par la matrice Δ . Nous pouvons donc résoudre l'équation (40) :

$$\Delta = R^{-1} F$$

L'état de déformation et l'état de contrainte sont ensuite donnés par :

$$D = U^t \Delta, \quad C = rD$$

2.9.3 Structures soumises à des déformations imposées

Dans l'élément E^μ supposé isolé de la structure, les déformations imposées, par la température ou le retrait par exemple, provoquent des déplacements des nœuds A_v définis par des matrices $\bar{\Delta}_v^\mu$. Dans la structure, le déplacement Δ_α du nœud A_α est la somme du déplacement $\bar{\Delta}_\alpha^\mu$ et du déplacement Δ_α^μ provoqué par les réactions exercées sur E^μ par les autres éléments ; nous avons donc, quel que soit l'élément E^μ contenant le nœud A_α :

$$\Delta_\alpha = \bar{\Delta}_\alpha^\mu + \Delta_\alpha^\mu \quad (41)$$

Les forces F_v^μ qu'il faut appliquer à l'élément E^μ pour obtenir les déplacements Δ_α^μ sont données par la formule (39) :

$$F_v^\mu = \sum_\alpha R_{v\alpha}^\mu \Delta_\alpha^\mu = \sum_\alpha R_{v\alpha}^\mu (\Delta_\alpha - \bar{\Delta}_\alpha^\mu)$$

Puisqu'il n'y a pas de forces extérieures appliquées à la structure, les équations d'équilibre des nœuds s'écrivent :

$$\sum_\mu F_v^\mu = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, N)$$

$$\text{soit} \quad \sum_\alpha R_{v\alpha} \Delta_\alpha = \bar{F}_v \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (42)$$

\bar{F}_v désignant la force fictive :

$$\bar{F}_v = \sum_\mu \left(\sum_\alpha R_{v\alpha}^\mu \bar{\Delta}_\alpha^\mu \right) = \sum_\alpha \left(\sum_\mu R_{v\alpha}^\mu \bar{\Delta}_\alpha^\mu \right)$$

Les équations (42) ne diffèrent des équations (40) que par le remplacement de F_v par \bar{F}_v ; nous pouvons donc calculer les déplacements Δ_α et, grâce à la relation (41), les déplacements Δ_α^μ qui provoquent l'état de contrainte C^μ de l'élément E^μ contenant les nœuds $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, \dots$:

$$C^\mu = r^\mu D^\mu = r^\mu (U^\mu)^t \Delta^\mu$$

Remarque : les déplacements $\bar{\Delta}_\alpha^\mu$ ne sont définis qu'à un déplacement d'ensemble près de l'élément E^μ ; on vérifie aisément que \bar{F}_v ne change pas si l'on ajoute à $\bar{\Delta}_\alpha^\mu, \bar{\Delta}_\beta^\mu, \dots$ des déplacements $\delta_\alpha^\mu, \delta_\beta^\mu, \dots$ résultant d'un déplacement d'ensemble de l'élément E^μ . On peut calculer les déplacements $\bar{\Delta}_\alpha^\mu, \bar{\Delta}_\beta^\mu, \dots$ en supposant l'élément E^μ appuyé isostatiquement, comme on l'a fait pour définir C^μ et D^μ .

2.10 Vibrations non amorties des structures (S)

2.10.1 Équations différentielles des vibrations

Pour étudier les vibrations d'une structure (S), nous répartissons la masse de la structure entre les différents nœuds A_v de façon que la masse M_v affectée au nœud A_v ait pour centre de gravité A_v ; la matrice centrale d'inertie de la masse M_v est :

$$J_v = \begin{bmatrix} \Sigma m (\xi_2^2 + \xi_3^2) & -\Sigma m \xi_1 \xi_2 & -\Sigma m \xi_1 \xi_3 \\ -\Sigma m \xi_2 \xi_1 & \Sigma m (\xi_3^2 + \xi_1^2) & -\Sigma m \xi_2 \xi_3 \\ -\Sigma m \xi_3 \xi_1 & -\Sigma m \xi_3 \xi_2 & \Sigma m (\xi_1^2 + \xi_2^2) \end{bmatrix}$$

(ξ_1, ξ_2, ξ_3) désignant les coordonnées de l'élément de masse m relativement aux axes $A_v \xi_1 \xi_2 \xi_3$ parallèles aux axes $Ox_1 x_2 x_3$ du repère général.

L'équation du mouvement de la structure s'obtient en écrivant l'équilibre de la structure soumise aux forces extérieures définies par la matrice F et aux forces d'inertie définies par la matrice F^I :

$$R\Delta = F + F^I$$

R désignant la matrice de raideur de l'ensemble de la structure.

Puisqu'il s'agit de petits mouvements, la force d'inertie appliquée au nœud A_v a pour expression, en accentuant les dérivées par rapport au temps :

$$F_v^I = \begin{bmatrix} -M_v \lambda_v'' \\ -J_v \omega_v'' \end{bmatrix}$$

avec λ_v et ω_v matrices colonnes définissant la translation et la rotation du nœud A_v (§ 2.2.2)

$$\text{soit} \quad F_v^I = -Q_v \Delta_v'' \quad \text{avec} \quad Q_v = \begin{bmatrix} M_v I & 0 \\ 0 & J_v \end{bmatrix}$$

I désignant la matrice unité d'ordre 3.

Il en résulte que :

$$F^I = -Q \Delta'' \quad \text{avec} \quad Q = \text{Diag} (Q_v)$$

La matrice Q , diagonale par blocs, est la **matrice d'inertie de la structure**. L'équation matricielle du mouvement s'écrit donc :

$$Q \Delta'' + R \Delta = F \quad (43)$$

Nous allons transformer cette équation. La matrice symétrique Q étant associée à la forme quadratique définie positive $\frac{1}{2} \Delta'^t Q \Delta'$ qui représente l'énergie cinétique de la structure, il existe au moins une matrice *régulière* S telle que :

$$S^t Q S = I$$

La matrice symétrique :

$$\mathcal{R} = S^t R S$$

est associée à une forme quadratique définie positive :

$$X^t \mathcal{R} X = X^t (S^t R S) X = (S X)^t R (S X)$$

Toutes les *valeurs propres* de la matrice \mathcal{R} sont donc *réelles et positives*, et il existe une matrice orthogonale Ω ($\Omega^t = \Omega^{-1}$) qui diagonalise la matrice \mathcal{R} :

$$\Omega^t \mathcal{R} \Omega = \Lambda = \text{Diag} (\lambda_i)$$

Il résulte des considérations précédentes que si l'on pose :

$$\Delta = S \Omega Z \quad \text{et} \quad \Phi = (S \Omega)^t F$$

l'équation du mouvement (43) se transforme en l'équation :

$$Z'' + \Lambda Z = \Phi \quad (44)$$

Supposons que la matrice colonne Z ait p éléments Z_i ; l'équation (44) équivaut aux p équations différentielles indépendantes :

$$Z_i'' + \lambda_i Z_i = \Phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (45)$$

2.10.2 Vibrations naturelles et vibrations propres

Les **vibrations naturelles** sont les vibrations de la structure en l'absence de forces extérieures ; elles vérifient donc l'équation (43) avec $F = 0$. La transformation de l'équation (43) en l'équation (44) montre que les vibrations naturelles résultent de la superposition de **vibrations propres** définies par les équations différentielles :

$$Z_i'' + \lambda_i Z_i = 0$$

donc de la forme :

$$Z_i = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t$$

ω_i désignant les *pulsations propres* :

$$\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$$

Si l'on pose :

$$A = \text{Diag} (A_i), \quad B = \text{Diag} (B_i) \\ \cos(t) = \text{Col}(\cos \omega_i t), \quad \sin(t) = \text{Col}(\sin \omega_i t)$$

la vibration naturelle la plus générale a pour expression :

$$\Delta = S\Omega [A \cos(t) + B \sin(t)]$$

2.10.3 Vibrations forcées

Nous supposons que les forces extérieures $F = F_0 \sin \omega t$ sont des forces sinusoïdales ayant la même pulsation ω . Donc :

$$\Phi = \Phi_0 \sin \omega t \quad \text{avec} \quad \Phi_0 = (S\Omega)^t F_0$$

La structure entrera en vibration forcée de pulsation ω si l'équation (44) admet une solution de la forme :

$$Z = Z_0 \sin \omega t$$

donc s'il existe une matrice Z_0 telle que :

$$(\Lambda - \omega^2 I) Z_0 = \Phi_0$$

Si ω n'est pas égal à une pulsation propre ω_i , la matrice :

$$\Lambda - \omega^2 I = \text{Diag}(\omega_i^2 - \omega^2)$$

est régulière, et :

$$Z_0 = (\Lambda - \omega^2 I)^{-1} \Phi_0 = \text{Diag}\left(\frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2}\right) \Phi_0$$

Mais si ω est égal à la pulsation propre ω_i , la i^{e} équation (45) admet la solution :

$$Z_i = -\frac{1}{2\omega_i} \Phi_{0i} t \cos \omega_i t$$

$|Z_i|$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut lorsque t augmente indéfiniment. Il y a alors *résonance*. La stabilité de la structure n'est plus assurée, à moins qu'il n'existe un amortissement suffisant (article *Vibrations* [A 410] dans le traité Sciences fondamentales).

3. Méthode des éléments finis

3.1 Principe de la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode approchée de calcul numérique, permettant de déterminer l'équilibre élastique des structures continues à deux ou trois dimensions : structures planes, solides élastiques, plaques minces, membranes et coques. Grâce au *principe de d'Alembert*, elle permet d'étudier les vibrations de ces structures. Elle peut également être étendue aux structures visco-élastiques ou plastiques.

La méthode des éléments finis consiste à déterminer les déplacements en un certain nombre de points A_v ($v = 1, 2, \dots, N$) de la structure ; ces déplacements sont définis par des matrices colonnes Δ_v qui sont les inconnues qu'il faut calculer. La méthode repose sur deux hypothèses.

■ La **première hypothèse** consiste à diviser, au moyen de lignes ou de surfaces imaginaires passant par les nœuds A_v , la structure en

un nombre fini d'éléments E^μ ($\mu = 1, 2, \dots, M$) et à supposer que *les éléments E^μ ne sont mécaniquement assemblés entre eux qu'aux nœuds A_v .*

■ La **seconde hypothèse** consiste à représenter le déplacement en un point M de l'élément E^μ par une *fonction matricielle d'interpolation* $U(M)$ prenant les valeurs $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma, \dots$ lorsque le point M vient aux nœuds $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, \dots$ de l'élément.

Le théorème des travaux virtuels permet de déterminer quelles forces il faut appliquer aux nœuds $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, \dots$ pour assurer l'équilibre de E^μ connaissant les déplacements $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma, \dots$ des nœuds, les forces extérieures appliquées à l'élément et les déformations éventuelles (dilatation thermique, retrait) imposées à l'élément. On obtient ainsi les matrices de rigidité généralisées des éléments ; il est donc possible de calculer les déplacements des nœuds en utilisant la méthode exposée au paragraphe 2.9.

La première hypothèse conduit à n'écrire que l'équilibre d'ensemble des éléments ; localement, les équations de l'équilibre ne sont pas vérifiées, puisqu'on néglige les réactions mutuelles qui s'exercent le long de la frontière commune à deux éléments.

La deuxième hypothèse peut donner lieu à des discontinuités du déplacement (ou de ses dérivées) interpolé à partir des valeurs aux nœuds lorsqu'on traverse la frontière commune à deux éléments. Il est souhaitable de choisir des fonctions d'interpolation ne conduisant pas à des discontinuités du déplacement, mais ce n'est pas toujours possible.

Pour que la méthode des éléments finis converge vers la solution exacte lorsque le nombre des éléments tend vers l'infini, la plus grande dimension de chaque élément tendant vers zéro, il est *nécessaire* que les deux **critères** suivants soient respectés.

— La *fonction d'interpolation doit être choisie de façon à n'entraîner aucune déformation d'un élément non sollicité dont les déplacements des nœuds résultent d'un déplacement d'ensemble de l'élément.*

— La *fonction d'interpolation doit être choisie de façon à obtenir un état de déformation uniforme d'un élément non sollicité lorsque les déplacements des nœuds sont compatibles avec cet état de déformation uniforme.*

Enfin, pour obtenir une bonne approximation, il faut choisir des éléments dont les différentes dimensions sont sensiblement égales : triangles voisins d'un triangle équilatéral, rectangles voisins d'un carré, etc.

La méthode des éléments finis peut être considérée comme un cas particulier de la méthode de Ritz pour la résolution approchée des problèmes d'élasticité. La **méthode de Ritz** consiste à représenter le déplacement par une combinaison linéaire de fonctions vérifiant les conditions aux limites, et à adopter pour solution approchée la combinaison linéaire qui rend minimale l'énergie potentielle totale.

Ce dernier aspect de la méthode des éléments finis a permis de l'appliquer à de nombreux problèmes de champ, lorsqu'une méthode variationnelle est possible, par exemple déterminer dans un domaine donné les valeurs numériques d'une fonction scalaire $U(M)$ vérifiant une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre, et satisfaisant à des conditions aux limites linéaires sur la frontière du domaine. De tels problèmes, dont le problème de Dirichlet et le problème de Neumann (§ 3.5) ne sont que des cas particuliers, se rencontrent souvent.

Citons, par **exemple**, l'écoulement d'un liquide à travers un milieu perméable, l'écoulement irrotationnel des fluides parfaits, la déformation transversale d'une membrane uniformément tendue, l'étude de la flexion et de la torsion d'une poutre de section quelconque, etc.

3.2 Formulation générale de la méthode des éléments finis

3.2.1 Étude d'un élément. Relation fondamentale

Considérons l'élément E^μ lié aux autres éléments E^μ ou aux appuis par les nœuds $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, \dots$. Un repère orthonormé étant choisi, nous représentons le déplacement $U(M)$ d'un point M de l'élément par la formule matricielle :

$$U(M) = \Phi^\mu(M) \Delta^\mu = \begin{bmatrix} \Phi_\alpha^\mu(M) & \Phi_\beta^\mu(M) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_\alpha \\ \Delta_\beta \\ \dots \end{bmatrix} \quad (46)$$

Les conditions :

$$U(A_\alpha) = \Delta_\alpha, \quad U(A_\beta) = \Delta_\beta, \dots$$

montrent que la **fonction d'interpolation** $\Phi^\mu(M)$ doit vérifier, quels que soient les nœuds A_α et A_β , les relations :

$$\Phi_\alpha^\mu(A_\alpha) = I, \quad \Phi_\alpha^\mu(A_\beta) = 0 \quad (\alpha \neq \beta)$$

I désignant la matrice unité.

La déformation $D(M)$ se déduit de $U(M)$ par un opérateur différentiel linéaire \mathcal{L} particulier à chaque type de structure :

$$D(M) = \mathcal{L}\{U(M)\}$$

Remplaçons $U(M)$ par son expression (46) ; en posant :

$$B^\mu(M) = \mathcal{L}\{\Phi^\mu(M)\} \quad \text{et} \quad B_\alpha^\mu(M) = \mathcal{L}\{\Phi_\alpha^\mu(M)\}$$

nous obtenons la formule qui donne la déformation $D(M)$ en fonction des déplacements des nœuds de l'élément :

$$D(M) = B^\mu(M) \Delta^\mu = \begin{bmatrix} B_\alpha^\mu(M) & B_\beta^\mu(M) & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_\alpha \\ \Delta_\beta \\ \dots \end{bmatrix} \quad (47)$$

Si r désigne la matrice de rigidité du matériau constitutif de la structure, qui peut éventuellement être fonction de M , la contrainte au point M est définie par la matrice colonne :

$$C(M) = r D(M)$$

Plus généralement, supposons l'élément soumis, du fait de la dilatation thermique ou du retrait, à une déformation imposée $D_0(M)$; la contrainte au point M est donnée par la relation :

$$C(M) = r [D(M) - D_0(M)] \quad (48)$$

Proposons-nous de déterminer quelles forces, définies par la matrice colonne F^μ formée par la juxtaposition des matrices colonnes $F_\alpha^\mu, F_\beta^\mu, F_\gamma^\mu, \dots$, il faut appliquer aux nœuds $A_\alpha, A_\beta, A_\gamma, \dots$ pour assurer l'équilibre de l'élément sous l'effet :

- des déplacements des nœuds définis par la matrice colonne Δ^μ ;
- d'une densité de force extérieure $f(M)$ appliquée à l'élément ;
- d'une déformation $D_0(M)$ imposée à l'élément.

Appliquons le théorème des travaux virtuels :

$$(\delta \Delta^\mu)^t F^\mu + \int_{E^\mu} [\delta U(M)]^t f(M) dM = \int_{E^\mu} [\delta D(M)]^t C(M) dM$$

Or il résulte des relations (46) et (47) que :

$$\delta U(M) = \Phi^\mu(M) \delta \Delta^\mu \quad \text{et} \quad \delta D(M) = B^\mu(M) \delta \Delta^\mu$$

En tenant compte de l'expression (48) de $C(M)$, nous obtenons ainsi la relation :

$$\begin{aligned} (\delta \Delta^\mu)^t F^\mu + (\delta \Delta^\mu)^t \int_{E^\mu} [\Phi^\mu(M)]^t f(M) dM \\ = (\delta \Delta^\mu)^t \int_{E^\mu} [B^\mu(M)]^t r [D(M) - D_0(M)] dM \end{aligned}$$

Nous déduisons de la relation précédente, exacte quelle que soit la variation virtuelle $\delta \Delta^\mu$, la **formule fondamentale** :

$$F^\mu = R^\mu \Delta^\mu + F'^\mu + F''^\mu \quad (49)$$

dans laquelle :

$$\left. \begin{aligned} R^\mu &= \int_{E^\mu} [B^\mu(M)]^t r B^\mu(M) dM \\ F'^\mu &= - \int_{E^\mu} [\Phi^\mu(M)]^t f(M) dM \\ F''^\mu &= - \int_{E^\mu} [B^\mu(M)]^t r D_0(M) dM \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

R^μ est la matrice de rigidité généralisée de l'élément E^μ .

F'^μ est la matrice qui définit les forces qu'il faut appliquer aux nœuds pour équilibrer la densité de force $f(M)$ lorsque les nœuds sont fixes ($\Delta^\mu = 0$).

F''^μ est la matrice qui définit les forces qu'il faut appliquer aux nœuds pour que la déformation imposée $D_0(M)$ n'entraîne aucun déplacement des nœuds ($\Delta^\mu = 0$).

3.2.2 Calcul des déplacements des nœuds

Nous suivons la méthode exposée au paragraphe 2.9. La formule (49) donne la matrice F_v^μ définissant la force qu'il faut appliquer au nœud A_v :

$$F_v^\mu = \sum_\alpha R_{v\alpha}^\mu \Delta_\alpha + F_v'^\mu + F_v''^\mu \quad (51)$$

la sommation étant étendue aux nœuds de l'élément E^μ , et :

$$\left. \begin{aligned} R_{v\alpha}^\mu &= \int_{E^\mu} [B_v^\mu(M)]^t r B_\alpha^\mu(M) dM \\ F_v'^\mu &= - \int_{E^\mu} [\Phi_v^\mu(M)]^t f(M) dM \\ F_v''^\mu &= - \int_{E^\mu} [B_v^\mu(M)]^t r D_0(M) dM \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

En supposant que des forces concentrées définies par la matrice colonne F_v soient appliquées au nœud A_v , l'équation d'équilibre du nœud A_v s'écrit :

$$F_v = \sum_\alpha R_{v\alpha} \Delta_\alpha + F_v' + F_v''$$

$$\text{avec} \quad R_{v\alpha} = \sum_\mu R_{v\alpha}^\mu \quad F_v' = \sum_\mu F_v'^\mu \quad F_v'' = \sum_\mu F_v''^\mu$$

la première sommation étant étendue à l'ensemble des éléments ayant en commun les nœuds A_v et A_α , et les deux dernières à l'ensemble des éléments ayant en commun le nœud A_v . Si l'on pose :

$$\Delta = \text{Col}(\Delta_v), \quad F = \text{Col}(F_v), \quad F' = \text{Col}(F_v'), \quad F'' = \text{Col}(F_v'')$$

l'ensemble des équations d'équilibre des nœuds équivaut à l'unique équation matricielle :

$$F = R \Delta + F' + F'' \quad (53)$$

dont la résolution exige l'inversion de la *matrice de raideur* R . Cette inversion est facilitée parce que la matrice R a beaucoup d'éléments nuls ; en effet, toute sous-matrice $R_{\alpha\beta}$ relative à deux nœuds A_α et A_β qui n'appartiennent pas à un ou plusieurs éléments est nulle. En numérotant convenablement les éléments, la matrice R prend la forme :

$$R = \begin{bmatrix} P_1 & Q_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ Q_1^t & P_2 & Q_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & Q_2^t & P_3 & Q_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & Q_3^t & P_4 & Q_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

et il est facile de montrer que l'inversion de la matrice R revient à inverser un certain nombre de matrices dont la somme des ordres est égale à l'ordre de la matrice R .

3.2.3 Vibrations des structures continues

L'élément E^μ est soumis à la densité de force extérieure $f(M)$ et à la densité de force d'inertie $\psi(M)$:

$$\psi(M) = -\rho(M) U''(M) = -\rho(M) \Phi^\mu(M) (\Delta^\mu)''$$

$\rho(M)$ désignant la masse par unité de volume.

La formule fondamentale (49) devient alors, en supposant qu'aucune déformation n'est imposée à l'élément ($F''^\mu = 0$) :

$$F^\mu = Q^\mu (\Delta^\mu)'' + R^\mu \Delta^\mu + F'^\mu \quad (54)$$

Q^μ désignant la matrice d'inertie de l'élément E^μ :

$$Q^\mu = \int_{E^\mu} \rho(M) [\Phi^\mu(M)]^t \Phi^\mu(M) dM \quad (55)$$

La formule (54) donne la matrice F_v^μ définissant les forces qu'il faut appliquer au nœud A_v de l'élément E^μ :

$$F_v^\mu = \sum_\alpha Q_{v\alpha}^\mu \Delta_\alpha'' + \sum_\alpha R_{v\alpha}^\mu \Delta_\alpha + F_v'^\mu \quad (56)$$

la sommation étant étendue aux nœuds de l'élément E^μ , et :

$$Q_{v\alpha}^\mu = \int_{E^\mu} \rho(M) [\Phi_v^\mu(M)]^t \Phi_\alpha^\mu(M) dM \quad (57)$$

On notera que :

$$Q_{\alpha v}^\mu = (Q_{v\alpha}^\mu)^t \quad \text{et} \quad Q_{vv}^\mu = (Q_{vv}^\mu)^t$$

En supposant qu'aucune force concentrée n'est appliquée au nœud A_v , l'équation du mouvement de A_v s'écrit :

$$\sum_\mu F_v^\mu = 0$$

$$\text{soit} \quad \sum_\alpha Q_{v\alpha} \Delta_\alpha'' + \sum_\alpha R_{v\alpha} \Delta_\alpha = -F_v' \quad (58)$$

la matrice $Q_{v\alpha}$ ayant pour expression :

$$Q_{v\alpha} = \sum_\mu Q_{v\alpha}^\mu$$

la sommation étant étendue aux éléments ayant en commun les nœuds A_v et A_α .

Si nous posons :

$$F = -\text{Col} (F_v')$$

et si nous définissons la **matrice d'inertie de la structure** par :

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & \dots \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & \dots \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

l'ensemble des équations (58) est équivalent à l'unique équation matricielle du mouvement :

$$Q \Delta'' + R \Delta = F \quad (59)$$

qui est identique à l'équation (43) et qui a été étudiée au paragraphe 2.10.

3.3 Structures élastiques planes

3.3.1 Éléments triangulaires simples

3.3.1.1 Fonction d'interpolation

La structure est divisée en triangles. Un élément E^μ comporte trois nœuds A_i, A_j, A_k rangés dans l'ordre où on les rencontre en parcourant le périmètre du triangle dans le sens trigonométrique (figure 9). Nous désignons par $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ et (x_k, y_k) les coordonnées des nœuds dans un repère orthonormé fixe Oxy .

Si l'on représente les composantes (u, v) du déplacement au point $M(x, y)$ de l'élément E^μ par des fonctions linéaires :

$$u(x, y) = a + bx + cy, \quad v(x, y) = a' + b'x + c'y$$

on dispose de six constantes que l'on peut déterminer en fonction des déplacements $(u_i, v_i), (u_j, v_j)$ et (u_k, v_k) des nœuds A_i, A_j et A_k .

Il est intéressant d'utiliser les *coordonnées trilineaires liées au triangle* $A_i A_j A_k$; si d_i, d_j et d_k désignent les distances du point M aux côtés du triangle dont les hauteurs sont h_i, h_j et h_k :

$$\xi_i = \frac{d_i}{h_i}, \quad \xi_j = \frac{d_j}{h_j}, \quad \xi_k = \frac{d_k}{h_k}$$

les coordonnées trilineaires s'expriment en fonction des coordonnées (x, y) par les formules :

$$\xi_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y)$$

$$\xi_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y)$$

$$\xi_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y)$$

dans lesquelles :

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k, \quad b_j = y_k - y_i, \quad c_j = x_i - x_k$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i, \quad b_k = y_i - y_j, \quad c_k = x_j - x_i$$

$$2A = a_i + a_j + a_k$$

A est l'aire du triangle.

Inversement, (x, y) s'exprime en fonction de (ξ_i, ξ_j, ξ_k) par :

$$x = x_i \xi_i + x_j \xi_j + x_k \xi_k \quad \text{et} \quad y = y_i \xi_i + y_j \xi_j + y_k \xi_k$$

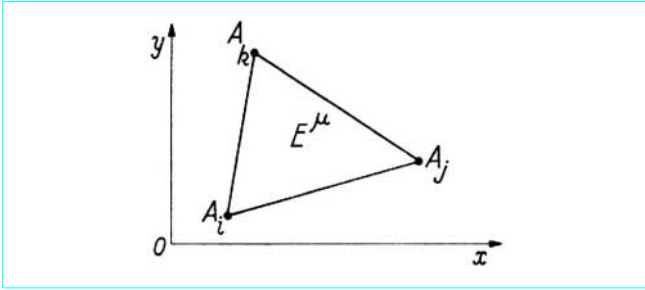


Figure 9 - Éléments triangulaire simple d'une structure

Les coordonnées trilineaires vérifient la relation :

$$\xi_i + \xi_j + \xi_k = 1$$

Les coordonnées trilineaires des nœuds A_i , A_j et A_k sont $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Les formules d'interpolation s'écrivent donc :

$$u = u_i \xi_i + u_j \xi_j + u_k \xi_k, \quad v = v_i \xi_i + v_j \xi_j + v_k \xi_k$$

ou, sous forme matricielle :

$$U(M) = \Phi^u \Delta^u = \xi_i \Delta_i + \xi_j \Delta_j + \xi_k \Delta_k$$

La fonction d'interpolation choisie entraîne la continuité de u et de v à la traversée de la frontière commune $A_i A_j$ à deux éléments, puisque u et v varient linéairement le long de $A_i A_j$ et que les déplacements (u_i, v_i) et (u_j, v_j) sont les mêmes pour les deux éléments.

3.3.1.2 Déformation

En un point M de l'élément, la déformation est définie par la matrice colonne :

$$D(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 2\gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

soit, compte tenu de la formule d'interpolation :

$$D(M) = B^u \Delta^u = B_i^u \Delta_i + B_j^u \Delta_j + B_k^u \Delta_k$$

avec :

$$B_i^u = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, \quad B_j^u = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ c_j & b_j \end{bmatrix}, \quad B_k^u = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_k & 0 \\ 0 & c_k \\ c_k & b_k \end{bmatrix}$$

3.3.1.3 Contrainte

Elle est définie par la matrice colonne :

$$C(M) = [\sigma_1 \sigma_2 \tau_3]^t$$

Les formules de l'élasticité plane montrent que la contrainte $C(M)$ se déduit de la déformation $D(M)$ par la relation :

$$C(M) = r D(M)$$

dans laquelle la matrice de rigidité r a pour expression, dans le cas de la **contrainte plane** :

$$r = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

et, dans le cas de la **déformation plane** :

$$r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

avec E module d'Young,

ν coefficient de Poisson.

3.3.1.4 Matrice de rigidité de l'élément

Elle est de la forme :

$$\begin{bmatrix} R_{ii}^u & R_{ij}^u & R_{ik}^u \\ R_{ji}^u & R_{jj}^u & R_{jk}^u \\ R_{ki}^u & R_{kj}^u & R_{kk}^u \end{bmatrix}$$

Les sous-matrices sont données par la première formule (52). La fonction à intégrer se réduisant à une constante, on trouve, dans le cas de la **contrainte plane**, en désignant par e l'épaisseur de l'élément :

$$R_{ij}^u = A e (B_i^u)^t r B_j^u$$

et, dans le cas de la **déformation plane**, pour une tranche d'épaisseur égale à l'unité :

$$R_{ij}^u = A (B_i^u)^t r B_j^u$$

3.3.1.5 Forces nodales F'^u équilibrant une densité de force extérieure

Lorsque les composantes (p, q) de la densité de force extérieure sont constantes, la seconde formule (52) donne, moyennant des calculs simples :

$$F_i'^u = F_j'^u = F_k'^u = -\frac{1}{3} A \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

3.3.1.6 Effet d'une variation linéaire

Une dilatation uniforme τ causée par la température ou le retrait impose à l'élément une déformation :

$$D_0 = \begin{bmatrix} \tau \\ \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dans le cas de la } \textbf{contrainte plane}$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} (1+\nu)\tau \\ (1+\nu)\tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dans le cas de la } \textbf{déformation plane}$$

La dernière formule (52) donne, moyennant des calculs simples :

$$F_i''^{\mu} = -\frac{\tau E e}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix} \quad \text{dans le cas de la contrainte plane}$$

$$F_i''^{\mu} = -\frac{\tau E}{2(1-\nu)} \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix} \quad \text{dans le cas de la déformation plane}$$

Nous avons ainsi calculé tous les termes qui figurent dans la formule fondamentale (49). Nous pouvons donc calculer les déplacements des nœuds et en déduire la contrainte constante $C^{\mu} = r B^{\mu} \Delta^{\mu}$ de l'élément E^{μ} . Il est naturel de supposer que la contrainte ainsi calculée est la contrainte au centre de gravité de l'élément, et que la contrainte en un nœud est la moyenne des contraintes calculées pour les éléments qui aboutissent à ce nœud.

3.3.2 Autres types d'éléments utilisés

3.3.2.1 Éléments triangulaires à six nœuds

Si l'on représente les composantes du déplacement par des polynômes du second degré :

$$u = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2$$

$$v = a' + b'x + c'y + d'x^2 + e'xy + f'y^2$$

on dispose de douze coefficients que l'on peut exprimer en fonction des déplacements des sommets et des milieux des côtés d'un triangle. On obtient ainsi des éléments triangulaires à six nœuds (figure 10). Les déplacements sont continus, car le long d'un côté u et v sont des fonctions du second degré entièrement définies par leurs valeurs aux extrémités et au milieu du côté.

3.3.2.2 Éléments rectangulaires de côtés parallèles aux axes Oxy

En choisissant des axes $A_i x' y'$ liés à l'élément, parallèles aux axes Oxy (figure 11), si l'on représente les composantes du déplacement par les formules :

$$u = A + Bx' + Cy' + Dx'y'$$

$$v = A' + B'x' + C'y' + D'x'y'$$

on dispose de huit coefficients que l'on peut exprimer en fonction des déplacements des nœuds A_i, A_j, A_k et A_{ℓ} . En posant $x' = a\xi$ et $y' = b\eta$, on obtient ainsi la fonction d'interpolation :

$$U(M) = (1-\xi)(1-\eta)\Delta_i + \xi(1-\eta)\Delta_j + \eta(1-\xi)\Delta_k + \xi\eta\Delta_{\ell} \quad (60)$$

Le déplacement est continu à la traversée de la frontière commune à deux éléments, car u et v se réduisent à des fonctions linéaires le long des côtés des éléments.

3.3.2.3 Éléments isoparamétriques

Dans le cas où les éléments sont des quadrilatères quelconques $A_i A_j A_k A_{\ell}$ (figure 12), on peut encore représenter le déplacement $U(M)$ d'un point de l'élément par la formule (60), à condition d'exprimer les coordonnées d'un point de l'élément en fonction de deux paramètres ξ et η :

$$x = (1-\xi)(1-\eta)x_i + \xi(1-\eta)x_j + \eta(1-\xi)x_k + \xi\eta x_{\ell}$$

$$y = (1-\xi)(1-\eta)y_i + \xi(1-\eta)y_j + \eta(1-\xi)y_k + \xi\eta y_{\ell}$$

On définit ainsi un système de coordonnées curvilignes (ξ, η) ; les courbes $\xi = Cte$ et $\eta = Cte$ sont des droites, et les côtés du quadrilatère sont les droites $\xi = 0, \xi = 1, \eta = 0$ et $\eta = 1$. Les coordonnées des

nœuds sont donc : $A_i(0, 0)$, $A_j(1, 0)$, $A_k(0, 1)$ et $A_{\ell}(1, 1)$. Si l'on considère le quadrilatère $A_i A_j A_k A_{\ell}$ comme la projection sur Oxy d'un quadrilatère gauche, les lignes $\xi = Cte$ et $\eta = Cte$ sont les projections sur Oxy des génératrices du paraboloïde hyperbolique qui contient les côtés du quadrilatère gauche.

Nota : tous les résultats donnés dans ce paragraphe 3.3 s'étendent aisément aux structures élastiques à trois dimensions.

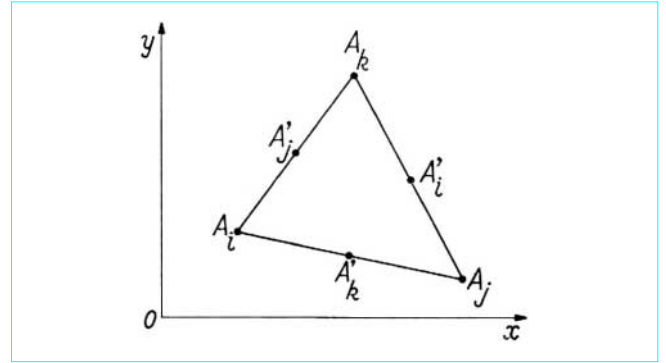


Figure 10 – Éléments triangulaires à six nœuds

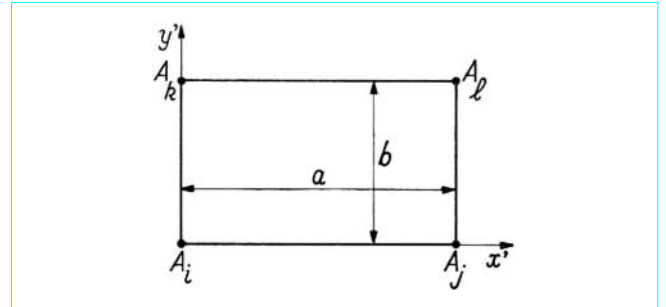


Figure 11 – Éléments rectangulaires

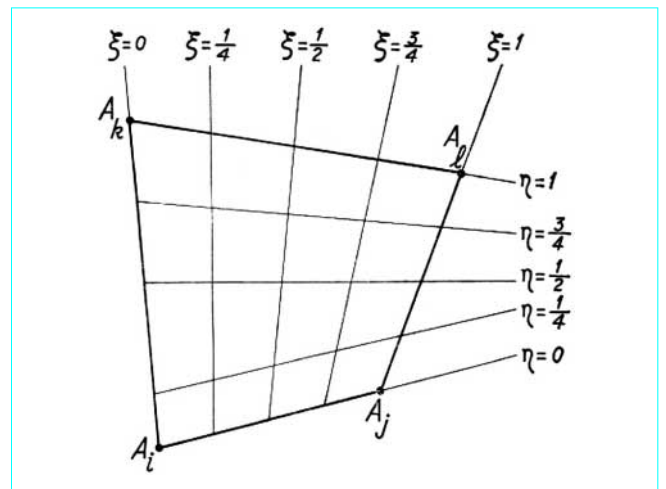


Figure 12 – Éléments isoparamétriques

3.4 Plaques minces

3.4.1 Généralités

Considérons une plaque mince dont le plan moyen Oxy devient après déformation une surface S d'équation $Z = w(x, y)$; le plan tangent à S au point $M(x, y)$ a pour équation :

$$Z - w = (X - x) \frac{\partial w}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial w}{\partial y}$$

Donc le déplacement d'un élément de plaque de centre M est le produit d'une translation de composante w suivant Oz , et d'une rotation de composantes α et β suivant Ox et Oy :

$$\alpha = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \beta = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

Le déplacement de l'élément de plaque de centre M est défini par la matrice colonne :

$$U(M) = [w \ \alpha \ \beta]^t$$

La plaque est sollicitée par une densité de force généralisée définie par la matrice colonne :

$$f(M) = [q(M) \ \gamma_x(M) \ \gamma_y(M)]^t$$

$q(M)$ est la composante de la densité de force suivant Oz ; $\gamma_x(M)$ et $\gamma_y(M)$ sont les composantes de la densité de couple suivant Ox et Oy .

La méthode des éléments finis consiste à remplacer la plaque par une structure composée d'éléments polygonaux E^μ assemblés entre eux de façon rigide aux nœuds A_v . Les déplacements des nœuds et les forces nodales appliquées à l'élément E^μ sont définis par les matrices colonnes :

$$\Delta_v = U(A_v), \quad F^\mu = [Q^\mu \ \Gamma_x^\mu \ \Gamma_y^\mu]^t$$

La contrainte de la plaque est définie par la matrice colonne :

$$C(M) = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^t$$

dans laquelle M_x , M_y et M_{xy} désignent les moments fléchissants et le moment de torsion.

La déformation de la plaque est définie par la matrice colonne :

$$D(M) = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^t$$

La théorie des plaques montre que :

$$C(M) = r D(M)$$

la matrice de rigidité r ayant pour expression :

$$r = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

avec E module d'Young,

h épaisseur de la plaque,

ν coefficient de Poisson.

On notera que la connaissance de la fonction $w(x, y)$ entraîne celle des matrices $U(M)$ et $D(M)$.

3.4.2 Utilisation d'éléments triangulaires

Nous supposons la plaque divisée en éléments triangulaires $A_i A_j A_k$ (figure 9), l'ordre $A_i A_j A_k$ correspondant au parcours du périmètre du triangle dans le sens trigonométrique.

Si nous représentons le déplacement transversal w de l'élément E^μ par un polynôme du troisième degré en x et y , ce polynôme contient dix coefficients. Comme il n'y a que neuf composantes de déplacement des nœuds, le polynôme dépendra linéairement d'un paramètre que l'on pourrait déterminer en écrivant que l'énergie de déformation est minimale.

Nous procéderons de façon différente. Nous étudierons d'abord l'élément $A_i A_j A_k$ simplement appuyé aux nœuds ; dans ce cas $w_i = w_j = w_k = 0$ et les réactions verticales des appuis se déterminent à l'aide des seules équations d'équilibre de la statique. Nous passerons ensuite au cas général en donnant un déplacement d'ensemble à l'élément supposé sur appuis simples.

Pour conserver la symétrie de l'élément, nous utiliserons les coordonnées trilinéaires (ξ_i, ξ_j, ξ_k) définies au paragraphe 3.3.1.1, et nous conserverons les notations définies dans ce paragraphe.

3.4.2.1 Étude de l'élément $A_i A_j A_k$ simplement appuyé aux nœuds

Nous accentuons toutes les quantités relatives à l'élément $A_i A_j A_k$ simplement appuyé. Les déplacements des nœuds sont définis par les matrices :

$$\Delta'_i = \begin{bmatrix} \alpha'_i \\ \beta'_i \end{bmatrix}, \quad \Delta'_j = \begin{bmatrix} \alpha'_j \\ \beta'_j \end{bmatrix}, \quad \Delta'_k = \begin{bmatrix} \alpha'_k \\ \beta'_k \end{bmatrix}$$

et les forces nodales correspondantes sont définies par les matrices :

$$F'^\mu_i = \begin{bmatrix} \Gamma'_{xi} \\ \Gamma'_{yi} \end{bmatrix}, \quad F'^\mu_j = \begin{bmatrix} \Gamma'_{xj} \\ \Gamma'_{yj} \end{bmatrix}, \quad F'^\mu_k = \begin{bmatrix} \Gamma'_{xk} \\ \Gamma'_{yk} \end{bmatrix}$$

Représentons le déplacement transversal w' par un polynôme du troisième degré en x et y ; ce polynôme doit vérifier les conditions :

$$\text{en } A_i \quad w' = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial y} = \alpha'_i, \quad \frac{\partial w'}{\partial x} = -\beta'_i$$

$$\text{en } A_j \quad w' = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial y} = \alpha'_j, \quad \frac{\partial w'}{\partial x} = -\beta'_j$$

$$\text{en } A_k \quad w' = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial y} = \alpha'_k, \quad \frac{\partial w'}{\partial x} = -\beta'_k$$

Ce polynôme dépend donc d'un paramètre λ ; en observant que la fonction $\xi_i \xi_j \xi_k$ ainsi que ses dérivées par rapport à x et à y sont nulles aux nœuds A_i , A_j et A_k , on met sans difficultés $w'(x, y)$ sous la forme :

$$w' = \sum_{i,j,k} [b_j(\xi_i^2 \xi_k + \lambda \xi_i \xi_j \xi_k) - b_k(\xi_i^2 \xi_j + \lambda \xi_i \xi_j \xi_k)] \alpha'_i + \sum_{i,j,k} [c_j(\xi_i^2 \xi_k + \lambda \xi_i \xi_j \xi_k) - c_k(\xi_i^2 \xi_j + \lambda \xi_i \xi_j \xi_k)] \beta'_i \quad (61)$$

Les coefficients b_i , b_j , b_k et c_i , c_j , c_k sont définis au paragraphe 3.3.1.1.

Lorsque l'élément est soumis à un état de déformation uniforme, les dérivées secondes de w' sont des constantes, et w' est un polynôme du second degré qui s'annule aux nœuds, donc de la forme :

$$w' = C_i \xi_j \xi_k + C_j \xi_k \xi_i + C_k \xi_i \xi_j \quad (62)$$

Si nous voulons que l'expression (61) puisse représenter un état de déformation uniforme, il faut que cette expression se réduise à l'expression (62) lorsqu'on donne aux rotations $\alpha'_i, \alpha'_j, \alpha'_k, \beta'_i, \beta'_j$ et β'_k les valeurs correspondant à un état de déformation uniforme défini par (62). Un calcul simple montre que cela n'est possible que lorsque $\lambda = 1/2$, valeur que nous adopterons désormais dans la fonction d'interpolation (61). Cette fonction d'interpolation n'entraîne pas la continuité du déplacement $U(M)$ à la traversée de la frontière commune à deux éléments.

La déformation $D(M)$ se déduit de l'expression de w' :

$$D(M) = \left[\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} 2 \frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial y} \right]^t = \sum_{i,j,k} \beta_i^{\mu}(M) \Delta'_i$$

$\beta_i^{\mu}(M)$ étant une matrice de dimension (3,2) dont il serait facile de donner l'expression.

Les sous-matrices de la matrice de rigidité R^{μ} de l'élément E^{μ} simplement appuyé aux nœuds sont alors données par la première formule (52) :

$$R_{mn}^{\mu} = \iint_{E^{\mu}} [B_m^{\mu}(M)]^t r B_n^{\mu}(M) dx dy$$

Le calcul de R_{mn}^{μ} peut être achevé en utilisant la valeur des intégrales :

$$J_{r,s} = \iint_{E^{\mu}} \xi_i^r \xi_j^s dx dy = 2A \frac{r!s!}{(r+s+2)!} \quad (r, s \text{ entiers})$$

3.4.2.2 Matrice de rigidité généralisée de l'élément $A_i A_j A_k$

Au cours de la déformation de la plaque, les nœuds A_i, A_j et A_k se déplacent normalement au plan moyen et viennent en A'_i, A'_j , et A'_k :

$$\overline{A_i A'_i} = w_i, \quad \overline{A_j A'_j} = w_j, \quad \overline{A_k A'_k} = w_k$$

L'équation du plan $A'_i A'_j A'_k$ est :

$$z = w_i \xi_i + w_j \xi_j + w_k \xi_k$$

Il en résulte que le déplacement normal w a pour valeur :

$$w = w' + w_i \xi_i + w_j \xi_j + w_k \xi_k$$

w' étant donné par la formule (61) dans laquelle $\lambda = 1/2$. En dérivant l'expression précédente par rapport à x et à y , nous trouvons :

$$\alpha'(M) = \frac{\partial w'}{\partial x} = \alpha(M) - \frac{1}{2A} (c_i w_i + c_j w_j + c_k w_k)$$

$$\beta'(M) = -\frac{\partial w'}{\partial y} = \beta(M) + \frac{1}{2A} (b_i w_i + b_j w_j + b_k w_k)$$

En plaçant successivement M en A_i, A_j et A_k , nous obtenons ainsi six relations équivalentes à l'unique relation matricielle :

$$\Delta^{\mu} = T \Delta^{\mu} \quad \text{avec} \quad \Delta^{\mu} = \begin{bmatrix} \Delta'_i \\ \Delta'_j \\ \Delta'_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta^{\mu} = \begin{bmatrix} \Delta_i \\ \Delta_j \\ \Delta_k \end{bmatrix}$$

T désignant la matrice de dimension (6,9) :

$$T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} -c_i & 2A & 0 & -c_j & 0 & 0 & -c_k & 0 & 0 \\ b_i & 0 & 2A & b_j & 0 & 0 & b_k & 0 & 0 \\ -c_i & 0 & 0 & -c_j & 2A & 0 & -c_k & 0 & 0 \\ b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 2A & b_k & 0 & 0 \\ -c_i & 0 & 0 & -c_j & 0 & 0 & -c_k & 2A & 0 \\ b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_k & 0 & 2A \end{bmatrix}$$

Les équations de la statique permettent de déterminer les réactions verticales d'appui de l'élément simplement appuyé. Nous savons donc calculer les forces nodales F^{μ} connaissant les forces nodales F'^{μ} . Nous trouvons la relation :

$$F^{\mu} = T^t F'^{\mu}$$

que l'on peut également démontrer au moyen du théorème des travaux virtuels :

$$(\delta \Delta^{\mu})^t F^{\mu} = (\delta \Delta^{\mu})^t F'^{\mu}$$

Nous déduisons successivement des relations précédentes :

$$F^{\mu} = T^t F'^{\mu} = T^t R'^{\mu} \Delta'^{\mu} = (T^t R'^{\mu} T) \Delta^{\mu}$$

donc la matrice de rigidité généralisée R^{μ} se déduit de la matrice de rigidité de l'élément supposé sur appuis simples par la formule :

$$R^{\mu} = T^t R'^{\mu} T$$

3.4.2.3 Forces nodales F'^{μ} équilibrant une densité de charge $q(x, y)$

L'expression de w en fonction des déplacements des nœuds se déduit des formules données précédemment :

$$w = \sum_{i,j,k} (L_i w_i + M_i \alpha_i + N_i \beta_i)$$

avec $L_i = 3\xi_i^2 - 2\xi_i^3 + 2\xi_i \xi_j \xi_k$

$$M_i = b_j \xi_i^2 \xi_k - b_k \xi_i^2 \xi_j + \frac{1}{2} (b_j - b_k) \xi_i \xi_j \xi_k$$

$$N_i = c_j \xi_i^2 \xi_k - c_k \xi_i^2 \xi_j + \frac{1}{2} (c_j - c_k) \xi_i \xi_j \xi_k$$

La deuxième formule (52) donne les forces nodales F_i^{μ} qui équilibrent la densité de charge $q(x, y)$:

$$F_i^{\mu} = \iint_{E^{\mu}} q(x, y) \begin{bmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{bmatrix} dx dy$$

Lorsque la densité de charge est constante et égale à q , nous trouvons :

$$F_i^{\mu} = \frac{1}{24} qA \begin{bmatrix} 8 \\ b_j - b_k \\ c_j - c_k \end{bmatrix}$$

3.5 Problèmes de Dirichlet et de Neumann dans le plan

3.5.1 Deux problèmes préliminaires de calcul des variations

Rappelons la **formule de Riemann** : soit un domaine Δ limité par une courbe (Γ) ; nous avons, α et β désignant les cosinus directeurs de la normale extérieure à (Γ) :

$$\iint_{\Delta} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} (P\alpha + Q\beta) ds$$

3.5.1.1 Premier problème

Soit une fonction U définie dans le domaine Δ , U_x et U_y ses dérivées partielles. Parmi toutes les fonctions U qui prennent des valeurs données sur le contour (Γ) , cherchons celle qui rend minimale l'intégrale :

$$J = \iint_{\Delta} F(x, y, U, U_x, U_y) dx dy \quad (63)$$

Calculons la variation de l'intégrale J :

$$\delta J = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial F}{\partial U} \delta U + \frac{\partial F}{\partial U_x} \delta U_x + \frac{\partial F}{\partial U_y} \delta U_y \right) dx dy$$

En tenant compte des identités :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial U_x} \delta U_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \delta U \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \right) \delta U \\ \frac{\partial F}{\partial U_y} \delta U_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U_y} \delta U \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U_y} \right) \delta U \end{aligned}$$

et en appliquant la formule de Riemann, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta J &= \iint_{\Delta} \left[\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U_y} \right) \right] \delta U dx dy \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\alpha \frac{\partial F}{\partial U_x} + \beta \frac{\partial F}{\partial U_y} \right) \delta U ds \end{aligned}$$

Puisque δU est nul sur le contour (Γ) [U et $U + \delta U$ prenant les mêmes valeurs sur (Γ)], la condition $\delta J = 0$ montre que la fonction U cherchée est l'intégrale de l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U_y} \right) = \frac{\partial F}{\partial U} \quad (64)$$

qui prend les valeurs données sur le contour (Γ).

3.5.1.2 Second problème

Parmi toutes les fonctions U qui vérifient sur le contour (Γ) la condition :

$$\frac{\partial f}{\partial U} + \alpha \frac{\partial F}{\partial U_x} + \beta \frac{\partial F}{\partial U_y} = 0 \quad (65)$$

cherchons celle qui rend minimale l'expression :

$$J = \iint_{\Delta} F(x, y, U, U_x, U_y) dx dy + \int_{\Gamma} f(x, y, U) ds \quad (66)$$

Le calcul fait pour le premier problème nous donne immédiatement :

$$\begin{aligned} \delta J &= \iint_{\Delta} \left[\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial U_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial U_y} \right) \right] \delta U dx dy \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial U} + \alpha \frac{\partial F}{\partial U_x} + \beta \frac{\partial F}{\partial U_y} \right) \delta U ds \end{aligned}$$

Nous en déduisons que la fonction U cherchée est l'intégrale de l'équation d'Euler (64) qui vérifie sur le contour la condition (65).

3.5.2 Résolution numérique d'un problème de Dirichlet

Les résultats obtenus au paragraphe 3.5.1.1 montrent que la fonction U , intégrale de l'équation aux dérivées partielles, dans laquelle P , Q et F sont des fonctions de x et y :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Q \frac{\partial U}{\partial y} \right) = F \quad (67)$$

qui prend des valeurs données sur le contour (Γ) d'un domaine Δ , rend minimale l'intégrale :

$$J = \frac{1}{2} \iint_{\Delta} \left[P \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + Q \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + 2 F U \right] dx dy \quad (68)$$

En particulier, lorsque $P = Q = 1$, l'équation (67) se réduit à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = F$$

Nous allons calculer les valeurs approchées U_v de la fonction U aux sommets A_v d'un réseau à mailles triangulaires (figure 13).

Sur le triangle E^μ de sommets A_i , A_j et A_k rangés dans l'ordre où on les rencontre en parcourant le périmètre dans le sens trigonométrique, nous pouvons représenter U par la fonction d'interpolation :

$$U = U_i \xi_i + U_j \xi_j + U_k \xi_k$$

ξ_i , ξ_j et ξ_k désignant les coordonnées trilineaires liées au triangle $A_i A_j A_k$ (§ 3.3.1.1).

Nous en déduisons dans le triangle E^μ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{2A} (b_i U_i + b_j U_j + b_k U_k) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{1}{2A} (c_i U_i + c_j U_j + c_k U_k) \end{aligned}$$

les coefficients b_i , b_j , b_k et c_i , c_j , c_k sont définis au paragraphe 3.3.1.1.

Pour déterminer les valeurs U_v , nous écrivons que l'intégrale (68) est minimale ; J est la somme des intégrales J^μ étendues aux triangles E^μ , dans lesquelles U , $\partial U / \partial x$ et $\partial U / \partial y$ ont les valeurs données précédemment. Nous obtenons ainsi autant d'équations que d'inconnues U_v :

$$\frac{\partial J}{\partial U_v} = \sum_{\mu} \frac{\partial J^\mu}{\partial U_v} = 0 \quad (69)$$

La dérivée $J_v^\mu = \partial J^\mu / \partial U_v$ n'est différente de zéro que lorsque A_v est un sommet du triangle E^μ ; donc la sommation qui figure dans l'équation (69) n'intéresse que les triangles E^μ qui ont A_v pour sommet.

Considérons le triangle $A_i A_j A_k$; en effectuant le calcul, nous trouvons :

$$J_i^\mu = \sum_v K_{iv}^\mu U_v - H_i^\mu \quad (70)$$

dans laquelle la sommation est étendue aux sommets du triangle, et :

$$\begin{aligned} K_{mn}^\mu &= \frac{b_m b_n}{4A^2} \iint_{E^\mu} P dx dy + \frac{c_m c_n}{4A^2} \iint_{E^\mu} Q dx dy \\ H_m^\mu &= - \iint_{E^\mu} F \xi_m dx dy \end{aligned}$$

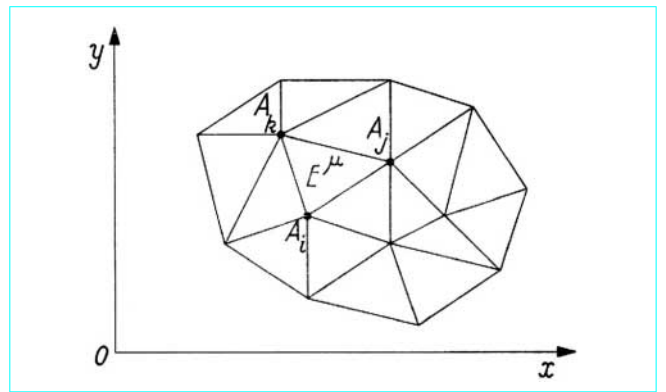


Figure 13 – Réseau à mailles triangulaires

Lorsque les fonctions P , Q et F sont constantes, ou peuvent être considérées comme constantes dans E^μ et égales à leurs valeurs P^μ , Q^μ et F^μ au centre de gravité de E^μ , les formules précédentes se réduisent à :

$$K_{mn}^\mu = \frac{1}{4A} (b_m b_n P^\mu + c_m c_n Q^\mu), \quad H_m^\mu = -\frac{1}{3} A F^\mu$$

Si l'on pose :

$$J'^\mu = \begin{bmatrix} J_i'^\mu \\ J_j'^\mu \\ J_k'^\mu \end{bmatrix}, \quad U^\mu = \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{bmatrix}, \quad H^\mu = \begin{bmatrix} H_i^\mu \\ H_j^\mu \\ H_k^\mu \end{bmatrix}$$

et si l'on définit la matrice symétrique K^μ par :

$$K^\mu = \begin{bmatrix} K_{ii}^\mu & K_{ij}^\mu & K_{ik}^\mu \\ K_{ji}^\mu & K_{jj}^\mu & K_{jk}^\mu \\ K_{ki}^\mu & K_{kj}^\mu & K_{kk}^\mu \end{bmatrix}$$

les trois relations qui donnent $J_i'^\mu$, $J_j'^\mu$ et $J_k'^\mu$ sont équivalentes à la seule relation matricielle :

$$J'^\mu = K^\mu U^\mu - H^\mu \quad (71)$$

Les équations qui donnent les valeurs U_v s'écrivent donc :

$$\sum_\mu J_v'^\mu = \sum_\mu \left(\sum_\alpha K_{v\alpha}^\mu U_\alpha \right) - \sum_\mu H_v^\mu = 0$$

Interversons l'ordre des sommations et posons :

$$K_{v\alpha} = \sum_\mu K_{v\alpha}^\mu \quad \text{et} \quad H_v = \sum_\mu H_v^\mu$$

la première sommation étant étendue à l'ensemble des triangles qui ont en commun les sommets A_v et A_α , et la seconde à l'ensemble des triangles qui ont en commun le sommet A_v ; nous obtenons les équations :

$$\sum_\alpha K_{v\alpha} H_\alpha = H_v \quad (v = 1, 2, \dots, N) \quad (72)$$

Les valeurs de U qui figurent dans les équations (72) comprennent :

- les valeurs inconnues U_1, U_2, \dots, U_N aux sommets intérieurs à (Γ) ; ces valeurs sont les éléments d'une matrice colonne U ;
- les valeurs connues $U_{N+1}, U_{N+2}, \dots, U_{N+N'}$ aux sommets situés sur (Γ) ; ces valeurs sont les éléments d'une matrice colonne U' .

Désignons par K et par K' les matrices :

$$K = [K_{mn}] \text{ avec } m = 1, 2, \dots, N; n = 1, 2, \dots, N$$

$$K' = [K_{mn}] \text{ avec } m = 1, 2, \dots, N; n = N+1, N+2, \dots, N+N'$$

les équations (72) sont équivalentes à l'équation matricielle :

$$KU + K'U' = H \quad (73)$$

H désignant la matrice colonne dont les éléments sont H_v .

Nous obtenons donc la solution :

$$U = K^{-1} (H - K'U')$$

K est une matrice symétrique d'ordre N ; tout élément K_{ij} de K est nul lorsque A_i et A_j ne sont pas deux sommets d'un même triangle.

3.5.3 Résolution numérique d'un problème de Neumann

Les résultats obtenus au paragraphe 3.5.1.2 montrent que la fonction U , intégrale de l'équation aux dérivées partielles (67) qui vérifie sur le contour (Γ) d'un domaine Δ la condition :

$$P\alpha \frac{\partial U}{\partial x} + Q\beta \frac{\partial U}{\partial y} + 2BU + C = 0 \quad (74)$$

B et C étant des fonctions données sur le contour (Γ) , rend minimale l'expression :

$$J = \frac{1}{2} \iint_\Delta \left[P \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + Q \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + 2FU \right] dx dy + \int_\Gamma (BU^2 + CU) ds \quad (75)$$

En particulier, lorsque $P = Q = 1$ et $B = 0$, la fonction U est l'intégrale de l'équation de Laplace dont la dérivée normale :

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial y}$$

prend des valeurs données sur le contour (Γ) .

Comme pour le problème de Dirichlet (§ 3.5.2), nous décomposons le domaine Δ en triangles E^μ , et nous cherchons les valeurs U_v de la fonction U aux sommets A_v des triangles; on notera que les valeurs de U aux sommets qui sont sur (Γ) sont inconnues. Nous représentons toujours U à l'intérieur d'un triangle E^μ par la formule d'interpolation utilisée pour le problème de Dirichlet. Le calcul des dérivées $J_v'^\mu$ conduit à distinguer deux cas.

■ **Aucun côté du triangle E^μ n'appartient au contour (Γ) .** Dans ce cas, l'intégrale curviligne n'intervient pas, et la formule (70) est encore exacte :

$$J_i'^\mu = \sum_v K_{iv}^\mu U_v - H_i^\mu \quad (76)$$

■ **Un côté du triangle E^μ appartient au contour (Γ) .** Supposons, par exemple, que le côté $A_i A_j$ du triangle $A_i A_j A_k$ appartienne au contour (Γ) . Nous devons alors tenir compte, dans la partie J^μ de l'expression (75) relative au triangle E^μ , de l'intégrale curviligne :

$$\bar{J}^\mu = \int_{A_i A_j} (BU^2 + CU) ds$$

U variant linéairement de U_i à U_j le long du côté $A_i A_j$ de longueur L ; la dérivée de \bar{J}^μ par rapport à U_k est nulle; en supposant que B et C puissent être considérés comme constants et égaux à leurs valeurs au milieu de $A_i A_j$, nous trouvons :

$$\frac{\partial \bar{J}^\mu}{\partial U_i} = \frac{1}{3} BL(2U_i + U_j) + \frac{1}{2} CL$$

$$\frac{\partial \bar{J}^\mu}{\partial U_j} = \frac{1}{3} BL(U_i + 2U_j) + \frac{1}{2} CL$$

Il en résulte qu'on peut encore considérer la formule (76) comme exacte pour un triangle dont un côté $A_i A_j$ fait partie de (Γ) , à condition de poser :

$$K_{ii}^\mu = K_{ii}'^\mu + \frac{2}{3} BL, \quad K_{ij}^\mu = K_{ij}'^\mu + \frac{1}{3} BL, \quad K_{jj}^\mu = K_{jj}'^\mu + \frac{2}{3} BL,$$

$$H_i^\mu = H_i'^\mu - \frac{1}{2} CL, \quad H_j^\mu = H_j'^\mu - \frac{1}{2} CL$$

les quantités accentuées étant calculées sans tenir compte de l'intégrale curviligne.

Un calcul semblable à celui fait pour le problème de Dirichlet montre que les valeurs cherchées de la fonction U sont les solutions des équations linéaires :

$$\sum_{\alpha} K_{v\alpha} U_{\alpha} = H_v \quad (77)$$

dans lesquelles :

$$K_{v\alpha} = \sum_{\mu} K_{v\alpha}^{\mu} \quad \text{et} \quad H_v = \sum_{\mu} H_v^{\mu}$$

On peut évidemment écrire les équations (77) sous forme matricielle :

$$KU = H$$

et obtenir ainsi la solution :

$$U = K^{-1} H$$

3.6 Principaux programmes de calcul

Donnons quelques caractéristiques des principaux programmes de calcul disponibles en France.

— **Programme STRESS** (Structural Engineering System Solver) : écrit sous la direction du Pr. S. J. Fenves au Massachusetts' Institute of Technology (États-Unis), c'est un programme de calcul d'ossatures (fermes et portiques plans et spatiaux). Il fonctionne sur matériel IBM et peut traiter des structures jusqu'à 300 nœuds. L'introduction des données est simple ; les sorties sont numériques ou graphiques.

— **Programme STRUDL** (Structural Design Language) : c'est un sous-système du système ICES (Integrated Civil Engineering) qui traite de la plupart des activités du génie civil et des travaux publics. C'est un programme de calcul d'ossatures et d'éléments finis, pouvant traiter des problèmes de diverses natures : prédimensionnement, analyse statique, analyse dynamique,

instabilité élastique, élasticité non linéaire, action de la houle. Il fonctionne sur matériel IBM. Le nombre de degrés de liberté n'est pas limité.

— **Programme ASKA** : écrit sous la direction du Pr. J. H. Argyris à l'université de Stuttgart (Allemagne), c'est un programme très complet, caractérisé par une abondante bibliothèque d'éléments (40 types). Il permet l'analyse statique et dynamique des structures ; génération automatique du maillage ; visualisation du maillage et des déformations. Il fonctionne sur matériel CDC et est exploité par la Compagnie internationale des services en informatique (CISI).

— **Programme NASTRAN** (NASA Structural Analysis) : mis au point par la National Aeronautics and Space Administration (États-Unis), il est destiné au traitement des problèmes importants de recherche et de développement de l'industrie aérospatiale. Il permet l'analyse statique et dynamique des grandes structures, avec une abondante bibliothèque d'éléments. Il traite des problèmes d'élasticité linéaire ou non, stabilité élastique, analyse modale, réponse fréquentielle ou aléatoire, réponse transitoire en élasticité linéaire ou non. Il fonctionne sur matériel CDC. C'est certainement le plus puissant des programmes existants, mais d'un maniement délicat. Il est exploité par la CISI.

— **Programme STARDYNE** : exploité par Cybernet Service, il est caractérisé par une bibliothèque d'éléments assez pauvre ; génération automatique du maillage ; visualisation du maillage et des déformations. Il permet l'analyse statique et dynamique des grandes structures (jusqu'à 15 000 degrés de liberté en statique et 6 000 en dynamique). C'est le meilleur programme d'analyse dynamique modale, transitoire, fréquentielle et aléatoire.

Parmi les programmes mis au point en France, nous citerons :

— le **programme HERCULE** mis au point par le SOCOTEC ;
— le **programme ELEFINI** établi par l'Institut national des sciences appliquées de Lyon ;
— le **programme TITUS** exploité par la Société de traitement automatique des données (STAD), caractérisé par une bibliothèque d'éléments assez pauvre ; génération automatique du maillage ; visualisation du maillage, des déformations et des contraintes principales ; analyse dynamique. C'est probablement le programme dont l'utilisation est la plus simple.

Références bibliographiques

- | | | |
|---|---|---|
| <p>[1] PING-CHUN WANG. – <i>Calcul des structures par les méthodes numériques et matricielles</i>. Dunod (1969).</p> <p>[2] BLAISE (P.). – <i>Le calcul des poutres dans l'espace et dans le plan</i>. Ann. Ponts et Chaussées (F), n° 23 et 26 (1956).</p> | <p>[3] ALBIGES (M.), COIN (A.) et JOURNAL (H.). – <i>Étude des structures par les méthodes matricielles</i>. Eyrolles (1969).</p> <p>[4] MASSONNET (Ch.), DEPREZ (G.), MAQUOI (R.), MULLER (R.) et FONDER (G.). – <i>Calcul des structures sur ordinateur</i>. 2 vol., 537 p., Masson (1972).</p> | <p>[5] ROUSSOPOULOS (A.I.). – <i>Théorie des structures élastiques</i>. 190 p., Dunod (1967).</p> <p>[6] ROBINSON (J.). – <i>Analyse matricielle des structures</i>. Dunod (1971).</p> <p>[7] COURBON (J.). – <i>Calcul des structures</i>. 367 p., Dunod (1972).</p> <p>[8] ZIENKIEWICZ (O.C.). – <i>La méthode des éléments finis</i>. 525 p., Édiscience (1973).</p> |
|---|---|---|