

Algèbre II

Les espaces vectoriels

Soit $(K, +, \cdot)$ un Corps commutatif

E un ensemble muni de deux lois:

L. interne: $E \times E \longrightarrow E$
 $(u, v) \longrightarrow u \oplus v$

L. externe:

$$K \times E \longrightarrow E$$

$$\lambda, u \longrightarrow \lambda \odot u$$

(E, \oplus, \odot) un K espace vectoriel \iff

1/ (E, \oplus) un **Groupe Abélien**

* \oplus une loi de composition interne.

$$\forall x, y \in E, x \oplus y \in E$$

* associativité: $\forall x, y, z \in E$
 $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$

* Commutativité: $\forall x, y \in E$
 $x \oplus y = y \oplus x$

* élément neutre $\exists e \in E, \forall x \in E, x \oplus e = x$
 et $e \oplus x = x$

* élément sym: $\forall x \in E, \exists x' \in E$
 $x \oplus x' = e \wedge x' \oplus x = e$

2/ $\forall v, u \in E, \lambda, \mu \in K$:

a. $\lambda \odot (v \oplus u) = \lambda \odot v \oplus \lambda \odot u$

b. $(\lambda + \mu) \odot u = \lambda \odot u \oplus \mu \odot u$

c. $(\lambda \cdot \mu) \odot u = \lambda \odot (\mu \odot u)$

d. $1_K \odot u = u$

[Condition à retenir]

Pour vérifier que e est un **s.e.v.**:

Soit E un ensemble
 et F un "

F un s.e.v. \iff

$F \neq \emptyset$ et $F \subseteq E$
 (on vérifie si l'élément neutre appartient)

$$\forall u, v \in F, \forall \lambda, \mu \in K$$

$$\lambda \overset{E}{\odot} u + \mu \overset{E}{\odot} v \in F$$

Loi externe de E

Loi interne de E

Rem 2

L'intersection de deux sous espaces vectoriel est un s.e.v.

1/ $E + F =$

Pour déterminer une base de $E + F$ il suffit de déterminer la base de E et la base de F

puis on vérifie si

$\langle \text{base } E, \text{base } F \rangle$

sont indépendants ou pas.

Si $F \cap G = \{0\}$ alors

$$F + G = F \oplus G$$

\Downarrow
 G supplémentaire de F ds E .

Remarque à retenir:

- $\dim F \leq \dim E$
- $\dim F = \dim E \Rightarrow F = E$
- $\dim F = 0 \Leftrightarrow F = \{0_E\}$

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G \Rightarrow F \oplus G$$

E engendre $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow$

$$\dim E = \dim \mathbb{R}^3$$

ex (1, x)

Ce n'est pas un s.e.v

2, e, $\sqrt{\dots}$

n'est pas un s.e.v

$E \oplus F$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Supplémentaire} \\ \text{Somme directe de } \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$

$\left\{ \begin{array}{l} \dim E + \dim F = \dim \mathbb{R}^3 \\ \dim F \cap E = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{Somme directe} \\ \text{Supplémentaire} \end{array} \right.$

Remarques

- quand il s'agit des propriétés des couples. Il faut faire comme l'exo du TD.

- K . s.e.v. : l'ensemble de la première partie de E.

$F(K, K)$ l'ensemble des fonctions qui vont de $K \rightarrow K$.

- pour dire que ce n'est pas un R.s.e.v. Il suffit de Montrer la négation (un seul élément suffit).

$$\forall (x, y, z) \in E, x = y^2.$$

- Combinaison linéaire de v_1, v_2, \dots, v_n .

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$$

donc. $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$

Pour Montrer que F est un s.e.v. de K

$$F \neq \emptyset$$

$$\{ \forall u, v \in F, u+v \in F.$$

$$\forall u \in F, \forall \lambda \in K, \lambda \cdot u \in F$$

$$\forall \lambda, \beta \in K, u, v \in F,$$

$$\lambda \cdot u + \beta \cdot v \in F.$$

- On peut voir les contre exemple avec les deux conditions.

$$(f+g)(x) = \underline{f(x) + g(x)}..$$

$K_2[X]$: l'ensemble des polynômes dont le degré ≤ 2 .

$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$
une famille génératrice de $(1, 1, 2)$.

$$\langle (x_1, x_2, x_3) \rangle$$

espace.v. engendré
de (x_1, x_2, x_3) .

- Famille génératrice
(les vecteurs peuvent
être liés)

- Base : (v indépendante).
Famille libre

$$\langle (1, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$$

généralisé
(engendré) par
les deux vecteurs

$$\langle (x+y, x, y) \rangle$$

l'intersection de deux
s.e.v. = s.e.v.

Mais ce n'est pas
le cas pour U

1/ $\langle \quad \rangle$
un seul vecteur $\neq 0$
alors \Rightarrow famille libre

2/ $\langle \quad \rangle$
plusieurs vecteurs

$$\left[\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_E \right]$$

avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

\Rightarrow famille libre.

si c'est $\neq 0$ alors
liée

définition :

$$\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K, \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in E$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = 0_K$$

nécessaire :

$$\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K \text{ tq.}$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E \text{ et}$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots \neq 0_K.$$

ps: polynôme

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n = 0_E$$

$$\Rightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \dots = 0_K$$

Quand on ne peut pas résoudre un système d'équation - on trouve par exemple deux équations égales ou α_1 en fonction de $\alpha_2 \dots$ dans ce cas, la famille est liée donc on a trouvé des valeurs pour $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ qui donnent l'élément neutre sans être nuls.

Comment choisir une Base ?

$$\alpha_2 = -\alpha_3$$

$$\alpha_1 = 2\alpha_3$$

pour déterminer une Base.

On laisse : $\alpha_1, \alpha_2 \Leftrightarrow$

Questions

- Pourquoi faire l'échelonnement E + F alors que on a une règle à appliquer.
- paramètre.
- Question 4 exo 3.

Montrer que E est un s.o.v.
 \Leftrightarrow Montrer qu'il est engendré par des vecteurs
Base Canonique :

$$(\alpha, \beta, \gamma) \\
\alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(0, 0, 1)$$

$$- A \subset B$$

$$* B \text{ libre} \Rightarrow A \text{ libre}$$

$E = \{1, X, X^2, \dots, X^n\}$ est une base de $K_n[X]$
 alors
 $\dim E = n+1$

* \mathbb{R}^3 : Maximum 3 vecteurs.
 $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

* \dim : nombre de vecteur non nuls d'une Base.

On a:

$$\{(x, y, z) \mid \begin{array}{l} x+y=0 \\ \text{et } x+z=y \end{array}\}$$

$$y = -x.$$

$$z = y - x = -2x.$$

$$(x, -x, -2x)$$

$$x(1, -1, -2)$$

une Base: $\langle (1, -1, -2) \rangle$.

Remarque importante

Pour déterminer FNG M2:

$$V_1 = W_2 - W_1$$

$$V_1 \in F.$$

$$W_2 - W_1 \in G.$$

$$V_1 \in F \cap G.$$

$$V_1 \neq (0, 0, 0, 0).$$

$\langle V_1 \rangle$ est une Base de $\{V_1\}$.

$$\langle V_1 \rangle = \langle W_2 - W_1 \rangle.$$

$$\dim V_1 = 1 = \dim F \cap G$$

$$\langle V_1 \rangle = \langle W_2 - W_1 \rangle = F \cap G$$

L'échelonnement :

Pour déterminer une base, on doit avoir une famille génératrice Libre, l'échelonnement nous aide à déterminer si les vecteurs sont indépendants, donc déterminer la.

Base

rang: le nombre de lignes non nulles

* $\text{rg}(u_1, u_2, u_3) = 3$ (Libre).

* $\text{rg}(u_1, u_2, u_3) < 3$ (liée).

Exemples :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = (1, 0, 1) \\ u_2 = (1, 1, 0) \\ u_3 = (-1, -3, 2) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = (1, 0, 1) \\ u_2 - u_1 = (0, 1, -1) \\ u_3 + u_1 = (0, -3, 3) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = (1, 0, 1) \\ u_2 - u_1 = (0, 1, -1) \\ u_3 + u_1 + 3(u_2 - u_1) = (0, 0, 0) \end{array} \right\}$$

$$u_3 + u_1 + 3u_2 + 3u_1 = 0$$

$$-2u_1 + 3u_2 + u_3 = 0$$

(la ligne nulle).

Pour déterminer une base:

On ne choisit pas u_1, u_2, u_3 mais, $\langle u_1, u_2 \rangle$ ou $\langle u_2, u_3 \rangle$ ou $\langle u_1, u_3 \rangle$

Mais pas les trois à la fois

remarque :

$$-2u_1 + 3u_2 = 0 \quad (u_3 \text{ n'est pas ds la ligne nulle})$$

dans la création d'une base il doit être

$$\langle u_3, u_1 \rangle \quad \langle u_3, u_2 \rangle$$

§

nombre d'élément de la base selon

engendrer \Rightarrow s.e.v.

donc pour montrer que E est un s.e.v. il suffit de Montrer qu'il est engendré par des vecteurs.

Supplémentaire.

$$E+F \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{Dim}(E+F) = \text{Dim } \mathbb{R}^3 = 3$$

$E+F$ est la somme des vecteurs E et F .

Par ex. On prend la Base de E et F .

$$E = \langle (1, 2, 3) \rangle$$

$$F = \langle (3, 4, 5), (6, 7, 8) \rangle$$

$$E+F = \langle (1, 2, 3), (3, 4, 5), (6, 7, 8) \rangle$$

F_1 et F_3 sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3

$$F_1 \oplus F_3 = \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} F_1 + F_3 = \mathbb{R}^3 \\ F_1 \cap F_3 = (0, 0, 0) \end{cases}$$

$$F_1 \cap F_3 = (0, 0, 0)$$

Deuxième façon de déduire (que) $G \cap E$

$$G = \langle (1, 0, -2), (0, 1, 1) \rangle$$

$$E = \langle (1, 2, 0), (1, 1, 1) \rangle$$

un vecteur $v \in E \cap G \iff$

$v \in E$ et $v \in G$.

$$G \cap E = \{ v \in \mathbb{R}^3 / v \in G \text{ et } v \in E \}$$

$$v \in E, \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} /$$

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(1, 1, 1)$$

$$v \in G, \exists \alpha', \beta' \in \mathbb{R} /$$

$$\alpha'(1, 0, -2) + \beta'(0, 1, 1)$$

$$\alpha(1, 2, 0) + \beta(1, 1, 1) = \alpha'(1, 0, -2) + \beta'(0, 1, 1)$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \alpha' \\ 2\alpha + \beta = \beta' \\ \beta = -2\alpha' + \beta' \end{cases}$$

après la résolution on trouve

$$G \cap E = \langle (1, 2, 0) \rangle$$

$$= \langle (1, 2, 0) \rangle$$

Base de

$G \cap E$.

Un vecteur qui appartient à un ensemble \Rightarrow il est en combinaison linéaire avec les vecteurs de l'une de ses bases

Algèbre Linéaire

1. Le système des équations Linéaires et Matrice:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

* C'est un système Linéaire

- La Forme Matricielle.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = C$$

Application sur les Matrices:

1. Addition:

Il faut que les Matrices aient le même type (même dim).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$2 \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 4 \\ 2 & 6 & 10 \\ 18 & 14 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Produit:

Pour faire le produit de $A \times B$

Il faut que le nb colonnes de A = nb ligne de B .

$$A (n, m, \mathbb{R}) \times B (m, m', \mathbb{R})$$

$$= C (n, m', \mathbb{R})$$

Idee Exemple sur la multiplication des Matrices:

* Impl
essone
ensembl
dime
rg

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2x3 3x1 Dim de C.
2x1

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Toujours on commence
par la première
de ligne de

3- La transposée d'une Matrice:

$$A_{n \times m} = A_{m \times n}$$

Les ligne yue les colonnes
et les colonnes yue les
lignes

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2x4

la transposée \Rightarrow

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4x2

4- La Matrice Diagonale

(elle doit être carré)
de type $n \times n$ et
appart la diagonale,
toute les valeurs sont des
zéros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On appelle cette Matrice
la Matrice identité
(elle contient la base
canonique).

Triangulaire

Supérieur :

مترتبة صاعدة

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inférieur :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

مترتبة هابطة

La Matrice Identité :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est une Matrice Carré

$$A_{m \times n} \times I_{n \times n} = A_{m \times n}$$

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

L'inverse d'une Mat :

$$M(n, n, \mathbb{R})$$

$$M \cdot M^{-1} = I_n$$

$$\text{rg}(M) = n$$

* Donc si on fait l'échelonnement et on trouve que $\text{rg}(M) = 2$

et M de type 2×2 donc $\text{rg}(M) = n$

donc M est inversible et M^{-1} existe.

L'ensemble des Matrices.

$$A \in M(n, m, \mathbb{R})$$

$(A+I)^2$: On peut l'appliquer à la matrice A .
nb ligne : 2
nb colonnes : 2

Pour montrer que h est linéaire
(homomorphisme):

$$h(\alpha v + \beta v') = \alpha h(v) + \beta h(v')$$

Le Ker h:

$$\text{Ker } h = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / h(x, y) = (0, 0) \}$$

l'élément
neutre de
l'addition

Si on trouve que
 $\text{Ker } h = \text{neutre de}$
l'addition.

\Rightarrow h injectif.

${}^t A$: transposé de A .

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker } h + \dim \text{Im } h \\ = 2$$

$$\text{Im } h = \langle h(e_1), h(e_2) \rangle$$

On vérifie c'est l'ensemble libre
et on obtiendra une base
de $\text{Im } h$

$$h = \langle h(e_1), h(e_2) \rangle$$

$$\langle (3, 2, 4), (-1, 3, -4) \rangle$$

$$= \{ h(x, y) / x, y \in \mathbb{R} \}$$

$$\{ x(3, 2, 4) + y(-1, 3, -4) \}$$

c'est libre.

$$\text{rg } \{v_1, v_2\} = \text{card } \{v_1, v_2\}$$

donc $\{h(e_1), h(e_2)\}$ est une
base de $\text{Im } h$

$$\text{Mat } h = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Idee Algèbre :

* $\text{Im}f, \text{Ker}f \dots$ On essaie d'engendrer l'ensemble pour avoir les dimensions ...

$$\text{rg } f = \dim \text{Im}f$$

$$\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \\ \text{soit travail de } \mathbb{R}^3 \end{pmatrix}$$

Une Base de $E \cap F$:

$$\underbrace{v_1 + v_2}_{\in E} = \underbrace{3v_1 + v_3}_{\in F} :$$

donc le vecteur appartient à l'intersection.

- Donner un supp de $E \cap F$ ds $E + F$.

$$\dim(E + F) = 3.$$

$$3 - 1 = 2.$$

donc on cherche 2 vecteurs de $E + F$:

mais ces deux vecteurs doivent être libre avec le v de F

Pour donner une Base de $\text{Im} h$.

soit on fait

$h(e_1), h(e_2)$ ou

on engendre l'ensemble.

Mat de ~~l'image~~

$\langle (3, 4), (-1, 5) \rangle$

$$\begin{pmatrix} h(e_1) & h(e_2) \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Im} h + \dim \text{Ker} h$$

pour trouver $\text{Im} h$ il suffit de faire

$$\text{Im} h \subset \mathbb{R}^2$$

$$\text{et } \dim \text{Im} h = \dim \mathbb{R}^2$$

$$\text{Im} h = \mathbb{R}^2.$$

Pour trouver le Mat associé.

$$\begin{pmatrix} h(e_1) & h(e_2) \\ h(e_1) & h(e_2) \end{pmatrix}$$

Le Binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^{n-k} B^k$$

$$\frac{n!}{(n-k)!k!}$$