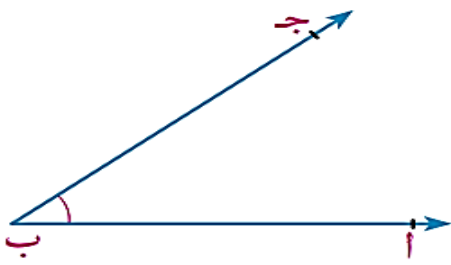


# الزاوية الموجهة



سبق لك أن تعرفت على أن الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة.

في الشكل المرسوم تسمى النقطة ب «رأس الزاوية».

والشعاعان  $\vec{BA}$ ،  $\vec{BJ}$  ضلعا الزاوية.

أى أن:  $\vec{BA} \cup \vec{BJ} = \angle A B J$

وتكتب كذلك  $\angle B$ .

## القياس الستيني للزاوية

علمت أن القياس الستيني يعتمد على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوسًا متساوية في الطول. وبالتالي فإن:

١- الزاوية المركزية التى ضلعاها يمران بنهايتى أحد هذه الأقواس يكون قياسها درجة واحدة (١°)

٢- تنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزءًا، كلٌّ منها يسمى دقيقة، وترمز له بالرمز (′)

٣- تنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزءًا، كلٌّ منها يسمى ثانية، وترمز له بالرمز (″)

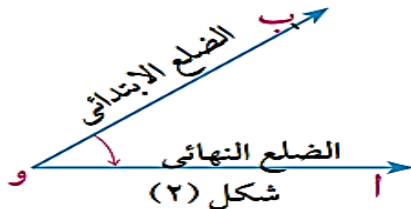
أى أن:  $1^\circ = 60'$ ،  $1' = 60''$

## الزاوية الموجهة



شكل (١)

إذا راعينا ترتيب الشعاعين المكونين للزاوية فإنه يمكن كتابتهما على شكل الزوج المرتب  $(\vec{OA}, \vec{OB})$  حيث العنصر الأول  $\vec{OA}$  هو الضلع الابتدائي للزاوية، العنصر الثانى  $\vec{OB}$  هو الضلع النهائي للزاوية التى رأسها نقطة و كما بالشكل (١).



شكل (٢)

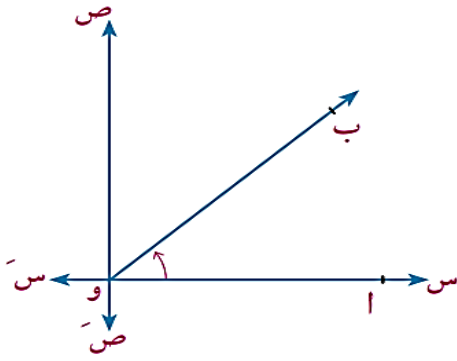
أما إذا كان الضلع الابتدائي  $\vec{OB}$ ، الضلع النهائي  $\vec{OA}$  فتكتب عندئذ  $(\vec{OB}, \vec{OA})$  كما فى شكل (٢).

الزاوية الموجهة هى زوج مرتب من شعاعين هما ضلعا الزاوية، لهما نقطة بداية واحدة هى رأس الزاوية.

تعريف

## الوضع القياسي للزاوية الموجهة

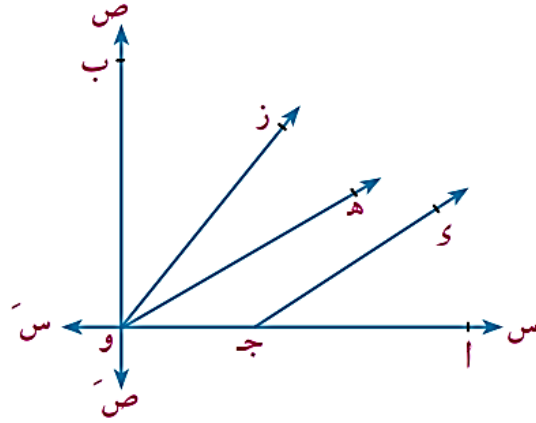
تكون الزاوية في وضع قياسي إذا كان رأس هذه الزاوية هو نقطة الأصل في نظام إحداثي متعامد، وضلعها الابتدائي يقع على الجزء الموجب لمحور السينات.



**اكمل**

تكون الزاوية الموجهة في وضع قياسي إذا تحقق الشرطان الآتيان ..... ، .....

أي من الأزواج المرتبة التالية يعبر عن زاوية موجهة في وضعها القياسي؟ فسر إجابتك.

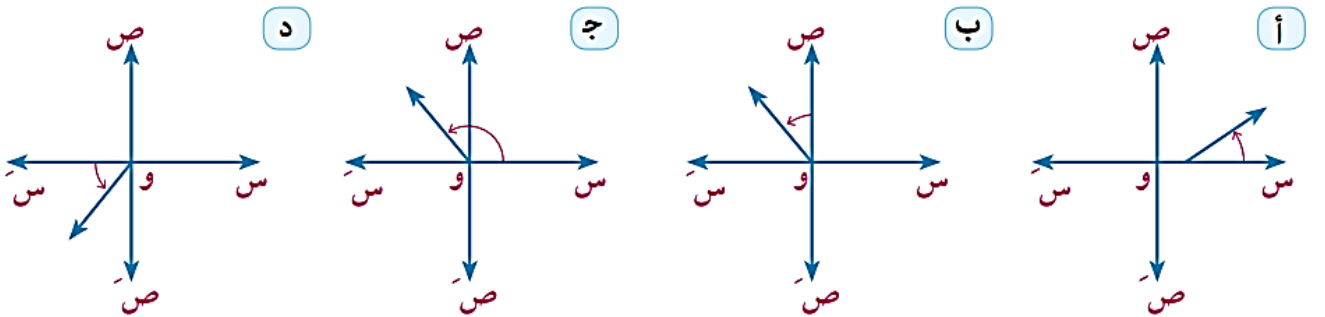


أ (جـ أ ، جـ ز) ب (و أ ، و هـ)

ج (و هـ ، و أ) د (و أ ، و ز)

هـ (و ب ، و ز) و (و أ ، و ب)

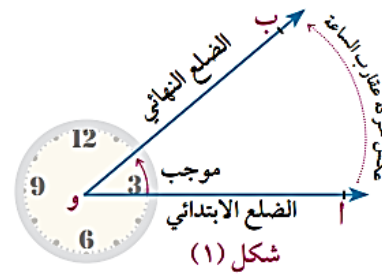
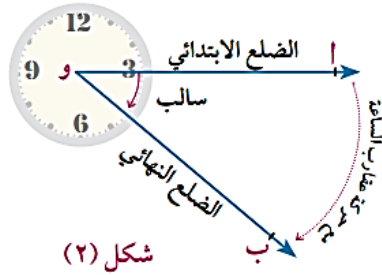
١ أي الزوايا الموجهة التالية في وضعها القياسي؟ فسر إجابتك.



## القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة:

في شكل (١) يكون قياس الزاوية الموجهة موجباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي  $\vec{OA}$  إلى الضلع النهائي  $\vec{OB}$  في عكس اتجاه حركة عقارب الساعة.

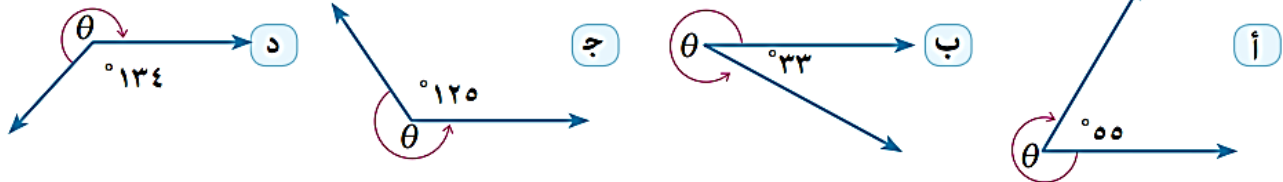
في شكل (٢) يكون قياس الزاوية الموجهة سالباً إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي  $\vec{OA}$  إلى الضلع النهائي  $\vec{OB}$  هو نفس اتجاه حركة عقارب الساعة.



**اكمل** تكون الزاوية سالبة إذا كان دوان الزاوية ..... وتكون ..... إذا كان دوران الزاوية .....

### مثال

١ أوجد قياس الزاوية الموجهة  $\theta$  المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية:



**الحل**

نعلم أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي  $360^\circ$

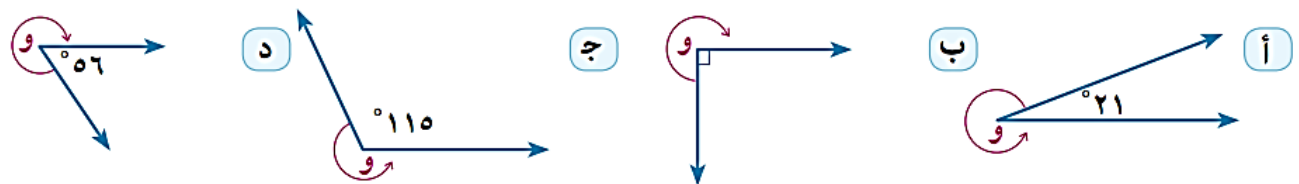
$$327 = 33 - \theta = \theta \quad \text{ب}$$

$$300 = 55 - \theta = \theta \quad \text{أ}$$

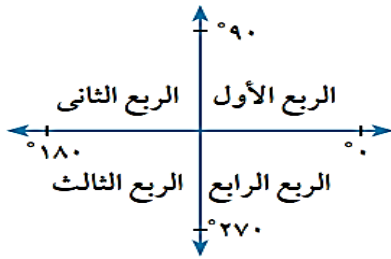
$$226 = 134 - \theta = \theta \quad \text{د}$$

$$235 = 125 - \theta = \theta \quad \text{ج}$$

٢ أوجد قياس الزاوية الموجهة (و) المشار إليها في كل شكل من الأشكال الآتية:

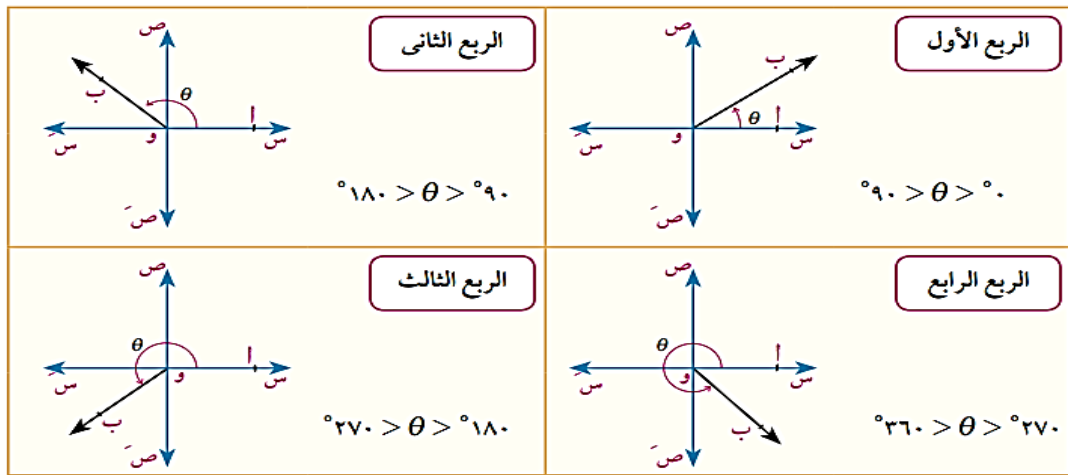


## موقع الزاوية في المستوى الإحداثي المتعامد:



يقسم المستوى الإحداثي المتعامد إلى أربعة أرباع كما في الشكل المقابل.

إذا كانت  $\angle AOB$  الموجهة في الوضع القياسي والتي قياسها الموجب هو  $(\theta)$  فإن ضلعها النهائي  $\overrightarrow{OB}$  يمكن أن يقع في أحد الأرباع:



إذا وقع الضلع النهائي  $\overrightarrow{OB}$  على أحد محوري الإحداثيات تسمى الزاوية في هذه الحالة بالزاوية الربعية (Quadrantal angle)، فتكون الزوايا التي قياساتها  $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$  هي زوايا ربعية.

**اكمل**

إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجهة على أحد محاور الأحداثيات تسمى .....  
عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالآتي:

- أ  $48^\circ$     ب  $217^\circ$     ج  $135^\circ$     د  $295^\circ$     هـ  $270^\circ$

**الحل**

- فهي تقع في الربع الأول.  
فهي تقع في الربع الثالث.  
فهي تقع في الربع الثاني.  
فهي تقع في الربع الرابع.

- أ  $90^\circ > 48^\circ > 0^\circ$   
ب  $270^\circ > 217^\circ > 180^\circ$   
ج  $180^\circ > 135^\circ > 90^\circ$   
د  $360^\circ > 295^\circ > 270^\circ$   
هـ  $270^\circ$  زاوية ربعية.

**مثال**

عين الربع الذي تقع فيه كل من الزوايا التي قياساتها كالآتي:

- أ  $88^\circ$     ب  $152^\circ$     ج  $180^\circ$     د  $300^\circ$     هـ  $196^\circ$

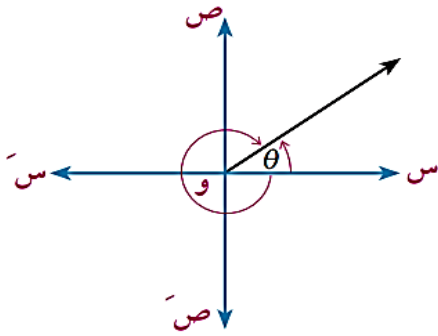
**اكمل**

الزاوية التي قياسها  $930^\circ$  تقع في الربع .....

## ملاحظة:

◀ إذا كان  $(\theta^\circ)$  هو القياس الموجب لزاوية موجهة  
فإن القياس السالب لها يساوي  $(\theta^\circ - 360^\circ)$

◀ وإذا كان  $(-\theta^\circ)$  هو القياس السالب لزاوية موجهة  
فإن القياس الموجب لها يساوي  $(-\theta^\circ + 360^\circ)$



## ملاحظة:

مجموع القيمة المطلقة لكل من القياسين الموجب والسالب للزاوية الموجهة يساوي  $360^\circ$

## مثال

عين القياس السالب لزاوية قياسها  $275^\circ$ .

## الحل

القياس السالب للزاوية  $(275^\circ) = 360^\circ - 275^\circ = 85^\circ$

التحقيق:  $360^\circ = 85^\circ + 275^\circ = |85^\circ| + |275^\circ|$

عين القياس السالب للزاويا التي قياساتها كالآتي:

## مثال

أ  $32^\circ$

ب  $270^\circ$

ج  $210^\circ$

د  $315^\circ$

## مثال

عين القياس الموجب للزاوية  $-235^\circ$

## الحل

القياس الموجب للزاوية  $(-235^\circ) = 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

التحقيق:  $360^\circ = 125^\circ + 235^\circ = |125^\circ| + |235^\circ|$

عين القياس الموجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

## مثال

أ  $52^\circ$

ب  $126^\circ$

ج  $90^\circ$

د  $320^\circ$

## مثال

**الربط بالألعاب الرياضية:** يدور أحد لاعبي القرص بزاوية قياسها  $150^\circ$  ارسم هذه الزاوية في الوضع القياسي.

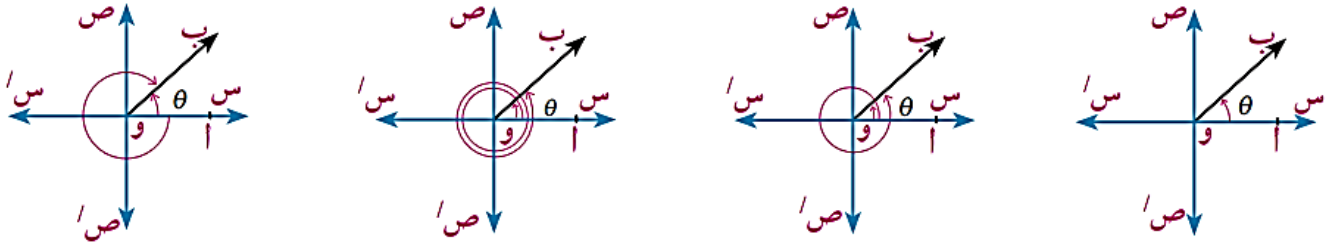
## اكمل

أصغر قياس سالب للزاوية التي قياسها  $530^\circ$  هو .....

أصغر قياس موجب للزاوية التي قياسها  $-690^\circ$  هو .....

## الزوايا المتكافئة

عند رسم زاوية موجهة قياسها  $\theta$  في الوضع القياسي فإن جميع الزوايا التي قياساتها:  
 $\theta \pm 360^\circ \times 1$  أو  $\theta \pm 360^\circ \times 2$  أو  $\theta \pm 360^\circ \times 3$  أو ..... أو  $\theta \pm 360^\circ \times n$  حيث  $n \in \mathbb{Z}$  ص  
 يكون لها نفس الضلع النهائي، وتسمى **زوايا متكافئة**.



**اكمل**

يقال لعدد من الزوايا الموجهة في الوضع القياسي أنها متكافئة إذا كان لها جميعاً .....  
 إذا كان  $(\theta)$  زاوية موجهة في الوضع القياسي،  $n \in \mathbb{Z}$  فإن  $(\theta + 360^\circ \times n)$  تسمى بالزوايا .....

### مثال

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين في الضلع النهائي لكل من الزاويتين الآتيتين:

أ  $120^\circ$       ب  $230^\circ -$

**الحل**

أ زاوية بقياس موجب:  $120^\circ + 360^\circ = 480^\circ$  (بإضافة  $360^\circ$ )

زاوية بقياس سالب:  $120^\circ - 360^\circ = -240^\circ$  (بطرح  $360^\circ$ )

ب زاوية بقياس موجب:  $230^\circ - 360^\circ = -130^\circ$  (بإضافة  $360^\circ$ )

زاوية بقياس سالب:  $230^\circ - 360^\circ = -130^\circ$  (بطرح  $360^\circ$ )

### مثال

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مشتركتين في الضلع النهائي لكل من الزوايا الآتية:

أ  $40^\circ$       ب  $150^\circ$       ج  $125^\circ -$       د  $240^\circ -$       هـ  $180^\circ -$

**اكتشف الخطأ:** جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية  $75^\circ$  في الوضع القياسي ما عدا الإجابة:

أ  $285^\circ -$       ب  $645^\circ -$       ج  $285^\circ$       د  $435^\circ$

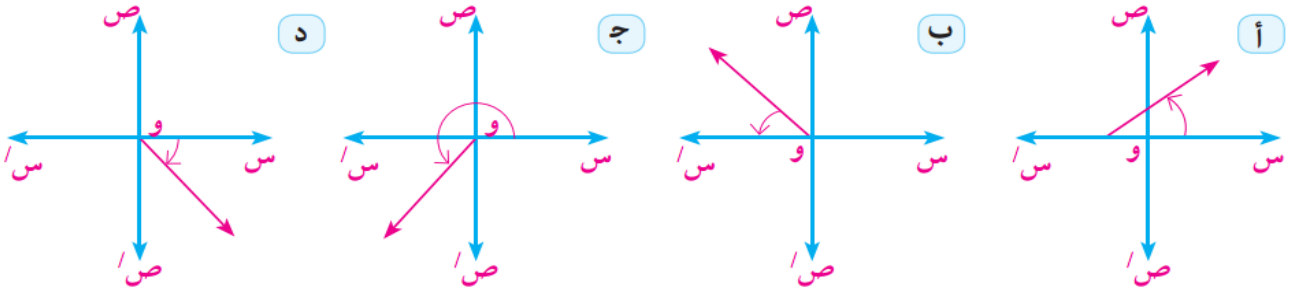


## أجب عن الأسئلة الآتية

١ اكمل:

- أ تكون الزاوية الموجهة في وضع قياسى إذا تحقق الشرطان الآتيان .....  
 ب يقال لعدد من الزوايا الموجهة في الوضع القياسى أنها متكافئة إذا كان لها جميعا .....  
 ج تكون الزاوية سالبة إذا كان دوان الزاوية ..... وتكون سالبة إذا كان دوران الزاوية .....  
 د إذا وقع الضلع النهائي للزاوية الموجهة على أحد محاور الأحداثيات تسمى .....  
 هـ إذا كان  $(\theta)$  زاوية موجهة في الوضع القياسى،  $\exists \text{ صـ فإن } (\theta + \text{ن} \times 360^\circ)$  تسمى بالزاويا .....  
 و أصغر قياس سالب للزاوية التى قياسها  $530^\circ$  هو .....  
 ز الزاوية التى قياسها  $930^\circ$  تقع فى الربع .....  
 ح أصغر قياس موجب للزاوية التى قياسها  $-690^\circ$  هو .....

٢ أي من الزوايا الموجهة الآتية في الوضع القياسى



٣ أوجد قياس الزاوية الموجهة  $\theta$  المشار إليها فى كل شكل من الأشكال التالية:



\* لإيجاد الوضع القياسى لاي زاوية : نتبع الآتى :

- ١ - إذا كان قياس الزاوية أكبر من  $360^\circ$  فيجب طرح منها  $360^\circ$  حتى نصل لأول عدد أقل من  $360^\circ$   
 ٢ - إذا كان قياس الزاوية سالب يجب جمع عليها  $360^\circ$  حتى نصل لأول عدد موجب

٤ عين الربع الذى تقع فيه كل من الزوايا التى قياساتها كالاتى:

- أ  $24^\circ$  ب  $215^\circ$  ج  $-40^\circ$  د  $-220^\circ$  هـ  $640^\circ$   
 أ  $56^\circ$  ب  $325^\circ$  ج  $570^\circ$  د  $166^\circ$  هـ  $390^\circ$

٥ ارسم كلا من الزوايا الآتية فى الوضع القياسى:

- أ ٣٢° ب ١٤٠° ج ٨٠° د ١١٠° هـ ٣١٥°

٦ عين القياس السالب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

- أ ٨٣° ب ١٣٦° ج ٩٠°

- أ ٢٦٤° ب ٢٦٤° ج ٢٧٠°

عين أحد القياسات السالبة لكل زاوية من الزوايا التى قياساتها كالاتى:

- أ ٤٣° ب ٢١٤° ج ١٢٥° د ٩٠° هـ ٣١٢°

عين أصغر قياس موجب لكل زاوية من الزوايا الآتية:

- أ ٥٦° ب ٢١٥° ج ٤٩٥° د ٩٣٠° هـ ٤٥٠°

٧ **اكتشف الخطأ:** اكتب قياس اصغر زاوية أحدهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب تشتركان مع الضلع النهائى للزاوية (١٣٥°)

**إجابة زياد**

أصغر زاوية بقياس موجب =  $135^\circ + 360^\circ = 495^\circ$   
أصغر زاوية بقياس سالب =  $135^\circ - 360^\circ = -225^\circ$

**إجابة كريم**

أصغر زاوية بقياس موجب =  $135^\circ + 180^\circ = 315^\circ$   
أصغر زاوية بقياس سالب =  $135^\circ - 180^\circ = -45^\circ$

أى الإجابتين صحيحًا؟ فسر إجابتك