

# T.D. 1. Ondes et Vibrations

2020-2021

## Exercice 1:

$$1) T = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$2) U = mgz = mg(l - l \cos \theta) = \frac{1}{2} mgl \theta^2$$

$$3) L = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} mgl \theta^2$$

$$4) \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

5) Équation de la forme  $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$   
dont la pulsation propre est

$$\omega_0 = \sqrt{g/l}$$

$$\text{A.N. } \omega_0 = \sqrt{10} \text{ rad/s}$$

$$6) \theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\bullet \text{ méthode (1): } \begin{cases} A = \sqrt{\theta_0^2 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2} = \theta_0 = \frac{\pi}{20} \text{ rad} \\ \varphi = -\arctan\left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0 \theta_0}\right) = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ méthode (2): } \begin{cases} \theta(t=0) = A \cos \varphi = \pi/20 \\ \dot{\theta}(t=0) = -A \omega_0 \sin \varphi = 0 \end{cases}$$



Exercice 2

1)  $n = 3N - k$   $\left\{ \begin{array}{l} N: \text{nbre de particules système} \\ k: \text{nbre de liaisons.} \end{array} \right.$

$N = 3$  et  $k = 8$  ( $x_1 = ck, y_1 = ck, x_2 = ck$   
 $y_2 = ck, x_3 = ck, y_3 = ck$   
 $l_1 + l_2 = de, l_3 = ck$ .)

nbre de degré de liberté:  $n = 3 \times 3 - 8 = 1$ .

$O$ : meilleur choix de coordonnées généralisées

2) système à 1 degré de liberté, libre et non-amorti.

3)  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

4)  $T = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2) \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \underbrace{a}_{\uparrow} \dot{\theta}^2$

5)  $\mathcal{L} = -m_1 g y_1 + m_2 g y_2 - m_3 g y_3 + \frac{1}{2} k y_1^2 + \frac{1}{2} k y_2^2$

Remarque: Ne pas définir de niveau d'énergie d'origine et calculer directement la variation de  $\mathcal{L}$ .



$$U = \frac{1}{2} (k l_1^2 + k l_2^2 - m_3 g l_3) \theta^2 + (-m_1 g l_1 + m_2 g l_2) \theta$$

$U_0 = 0$  (condition d'équilibre)

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0$$

$$U = \frac{1}{2} b \theta^2$$

$$6) L = T - U = \frac{1}{2} a \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} b \theta^2$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{b}{a} \theta = 0$$

$$7) \omega_0 = \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{k l_1^2 + k l_2^2 + m_3 g l_3}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 + m_3 l_3^2}}$$