

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I (2,0 điểm) Cho hàm số: $y = \frac{2x-1}{x-1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Tìm trên đồ thị (C) các cặp điểm đối xứng nhau qua đường thẳng d: $y = -2x + 4$.

Câu II (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $1 + \cos x - \frac{1 - 2 \sin x}{\cos x} = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \tan x$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + y - 2 = 2x \\ 2x^2y - 4x + y^2 = 3x^2 \end{cases}$$

Câu III (1,0 điểm) Tính tích phân: $I = \int_0^1 \frac{6^x dx}{9^x + 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x}$.

Câu IV (1,0 điểm)

Cho hình chóp S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), đáy ABCD là hình thang cân đáy lớn AD=2a, AB=BC=CD=a, khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích của khối chóp.

Câu V: (1,0 điểm) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{\sqrt{a+3b}} + \frac{1}{\sqrt{b+3c}} + \frac{1}{\sqrt{c+3a}}.$$

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC có đường phân giác trong góc A và đường cao tương ứng đỉnh C có phương trình lần lượt là $d_1: x - y = 0$, $d_2: x + 2y + 3 = 0$. Biết đỉnh B thuộc trục Oy và M(0; -1) là điểm của đường thẳng AC. Tìm tọa độ ba đỉnh của tam giác.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho tam giác ABC có A(0; 0; 2), B(0; 1; 0), C(-2; 0; 0). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Viết phương trình đường thẳng OH.

Câu VII.a (1,0 điểm) Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện: $\left| \frac{(1+i)z}{1-i} + 2 \right| = 1$.

Tìm số phức có mô đun nhỏ nhất, lớn nhất.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2,0 điểm)

1. Cho (P) $y^2 = x$ và đường thẳng (d): $x - y - 2 = 0$ cắt (P) tại hai điểm A và B. Tìm điểm C thuộc cung AB sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 5 = 0$, đường thẳng d:
$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

và điểm A(-2; 3; 4). Gọi Δ là đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) cắt và vuông góc với đường thẳng d. Tìm trên Δ điểm M sao cho độ dài AM ngắn nhất.

Câu VII.b (1,0 điểm) Tìm số phức z sao cho $\frac{z-i}{z+i}$ có một argumen bằng $\frac{\pi}{2}$ và $|z+1| = |\bar{z}-i|$.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh....., Số báo danh.....www.laisac.page.tl

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu -ý	Nội dung	Điểm											
I.1	*Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$	0.25											
	Tính $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0 \quad \forall x \in D$												
	Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$	0.25											
	*Hàm số không có cực trị Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$												
	Đồ thị có tiệm cận đứng : $x=1$, tiệm cận ngang $y=2$ *Bảng biến thiên <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>-</td><td></td><td>-</td></tr><tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	1	$+\infty$	y'	-		-	y			
x	$-\infty$	1	$+\infty$										
y'	-		-										
y													
	*Vẽ đồ thị	0.25											
I.2	*Xét dt d_m vuông góc với d: $y = \frac{1}{2}x + m$. PT hoành độ giao điểm của d_m với												
	(C): $\frac{2x-1}{x-1} = \frac{1}{2}x + m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x^2 - (5-2m)x + 2-2m = 0(1) \end{cases}$ có 2 nghiệm phân biệt với mọi	0.25											
	m.												
	*Gọi x_1, x_2 là các nghiệm của PT(1): $\Rightarrow x_1 + x_2 = 5-2m$. Toạ độ giao điểm của d_m với	0.25											
	(C): $A\left(x_1; \frac{1}{2}x_1 + m\right), B\left(x_2; \frac{1}{2}x_2 + m\right)$. Gọi I là trung điểm của AB thì $I\left(\frac{5-2m}{2}; \frac{5+2m}{4}\right)$	0.25											
	*A,B đối xứng nhau qua d $\Leftrightarrow I \in d \Rightarrow m = \frac{3}{2}$	0.25											
	* Khi đó PT(1) $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$	0.25											
	Vậy $A\left(1 - \sqrt{2}; \frac{4 - \sqrt{2}}{2}\right), B\left(1 + \sqrt{2}; \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\right)$ là cặp điểm cần tìm.												
II.1	*ĐK: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.	0.25											
	*Phương trình đã cho tương đương với: $1 + \cos x - \frac{1-2\sin x}{\cos x} = (1 + \cos x) \tan x$												
	* $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\sin x - 1) = 0$	0.25											
		0.25											
	* $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ (thỏa mãn đk)	0.25											

	$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ (loại) KL: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$	
II.2	<p>*Xét $x=0$ không thỏa mãn hệ PT. Xét $x \neq 0$ hệ tương đương với</p> $\begin{cases} \left(y - \frac{2}{x}\right) + \frac{y}{x} = 2 \\ 2\left(y - \frac{2}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 3 \end{cases}$ <p>*Đặt ẩn phụ $u = y - \frac{2}{x}; v = \frac{y}{x}$, ta được hệ</p> $\begin{cases} u + v = 2 \\ 2u + v^2 = 3 \end{cases}$ <p>*Giải hệ trên được nghiệm $(u;v)$ là $(1;1)$</p> <p>*Từ đó giải được nghiệm $(x;y)$ là $(-1;-1)$ và $(2;2)$</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
III	<p>*$I = \int_0^1 \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x dx}{\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + 3\left(\frac{3}{2}\right)^x + 2}$</p> <p>*Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$. $I = \frac{1}{\ln 3 - \ln 2} \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dt}{t^2 + 3t + 2}$</p> <p>*$= \frac{1}{\ln 3 - \ln 2} \int_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \frac{1}{\ln 3 - \ln 2} \ln \left \frac{t+1}{t+2} \right _1^{\frac{3}{2}}$</p> <p>*$= \frac{\ln 15 - \ln 14}{\ln 3 - \ln 2}$</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
IV	<p>*Vẽ hình</p> <p>Tính $S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$</p> <p>*Gọi I là trung điểm của AD $\Rightarrow IA = IB = IC = ID = a$ nên ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD $\Rightarrow \angle ACD = 90^\circ$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} AC \perp CD \\ SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow (SCD) \perp (SAC)$</p> <p>*Gọi H là hình chiếu của A trên SC thì $AH = d(A; (SCD)) = a\sqrt{2}$</p> <p>Tam giác SAC vuông tại A $\Rightarrow \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{AH^2} \Rightarrow SA = a\sqrt{6}$</p> <p>*Vậy $V_{ABCD} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{4}$</p>	<p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p> <p>0.25</p>
V	<p>*Ứng dụng Bất đẳng thức Côsi cho ba số dương ta chứng minh được:</p> $(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 3\sqrt[3]{xyz} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \quad (*)$ <p>*Ứng dụng Bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có</p>	0.25

VIa.1	+Tọa độ A;B là nghiệm hệ: $\begin{cases} y^2 = x \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}$ A(1;-1); B(4;2)	0.25
	+ $C(y_o^2; y_o) \in (P)$; $h=d(C;d)=\frac{ y_o^2 - y_o - 2 }{\sqrt{2}}$	0.25
	+ $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h.AB = \frac{3}{2} y_o^2 - y_o - 2 $	0.25
	+Xét hàm số $f = y_o^2 - y_o - 2 $ Với $-1 \leq y_o \leq 2$ Suy ra Max $f = 9/4$ Tại C(1/4;1/2)	0.25
VIa.2	*Gọi I là giao điểm của (d) và (P) $\Rightarrow I(2t-3; t-1; t+3)$ Do $I \in (P) \Rightarrow 2t-3+2(t-1)-(t-3)+5=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I(-1;0;4)$	0.25
	* (d) có vectơ chỉ phương là $\vec{a}(2;1;1)$, mp(P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1;2;-1)$. Ta có $[\vec{a}, \vec{n}] = (-3;3;3)$.	0.25
	*Gọi \vec{u} là vectơ chỉ phương của $\Delta \Rightarrow \vec{u}(-1;1;1)$ Phương trình đt Δ : $\begin{cases} x = 1-u \\ y = u \\ z = 4+u \end{cases}$.	0.25
	*Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(-1-u; u; 4+u)$, $\Rightarrow \overrightarrow{AM}(1-u; u-3; u)$ AM ngắn nhất $\Leftrightarrow AM \perp \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -1(1-u) + 1(u-3) + 1.u = 0$ $\Leftrightarrow u = \frac{4}{3}$. Vậy $M\left(\frac{-7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{16}{3}\right)$	0.25
VIIb	*Đặt $z = x + yi, (x, y \in R)$. Khi đó $Z_0 = \frac{z-i}{z+i} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2} + \frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2}i$	0.25
	* Z_0 có một argumen bằng $\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad (1)$	0.25
	*Lại có $ z+1 = \bar{z}-i \Leftrightarrow x = y \quad (2)$	0.25
	*Từ (1) và (2) suy ra $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$	0.25

Lưu ý : Nếu thí sinh làm cách khác đúng thì giám khảo chấm theo các bước làm của cách đó .