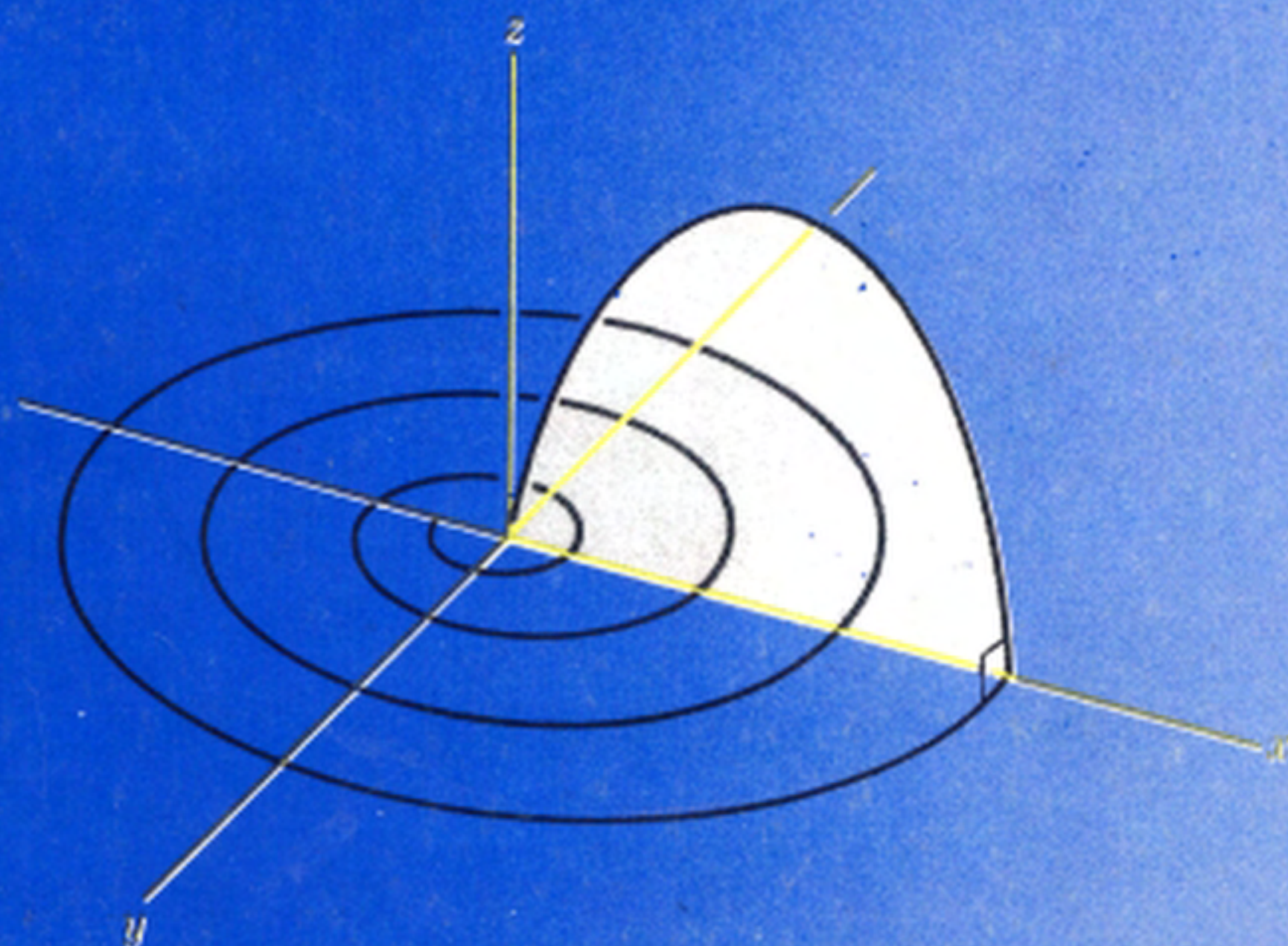


Μαθηματική Επιθεώρηση

1987Α 32

- Το παράδειγμα του Riemann για μια συνεχή μη διαφορίσιμη συνάρτηση
- Οι μαθηματικές τεχνικές στην εργασία του Fermat πάνω στο νόμο της διάθλασης
- Ο H.S.M. Coxeter είναι γεωμέτρης
- Αριθμητικά Συστήματα
- Η Επιστροφή... του θεωρήματος JORDAN
- Παρατηρήσεις σ' ένα άρθρο της Μ.Ε. τ. 31
- Μετασχηματισμοί στο τρίγωνο κι εφαρμογές
- Η Στήλη των Ολυμπιάδων
- Πληροφορίες για την Μαθηματική Επιθεώρηση



ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ
ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ
ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

Τ Ε Υ Χ Ο Σ 3 2

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ: Πανεπιστημίου 34
Αθήνα-10679

ΤΗΛ.: 3617784-3616532

ΤΙΜΗ ΤΕΥΧΟΥΣ ΔΡΧ. 30

- ΟΙ ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΕΣ ΠΡΕΠΕΙ ΝΑ ΣΤΕΛ-
ΝΟΝΤΑΙ ΕΓΚΑΙΡΑ ΣΤΑ ΓΡΑΦΕΙΑ ΤΗΣ
Ε.Μ.Ε. ΜΕ ΤΗΝ ΕΝΔΕΙΞΗ: «ΜΑΘΗΜΑ-
ΤΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗ»
- ΓΙΑ ΔΙΑΦΗΜΙΣΕΙΣ ΣΤΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ Α-
ΠΕΥΘΥΝΘΕΙΤΕ ΣΤΗΝ ΓΡΑΜΜΑΤΕΙΑ
ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

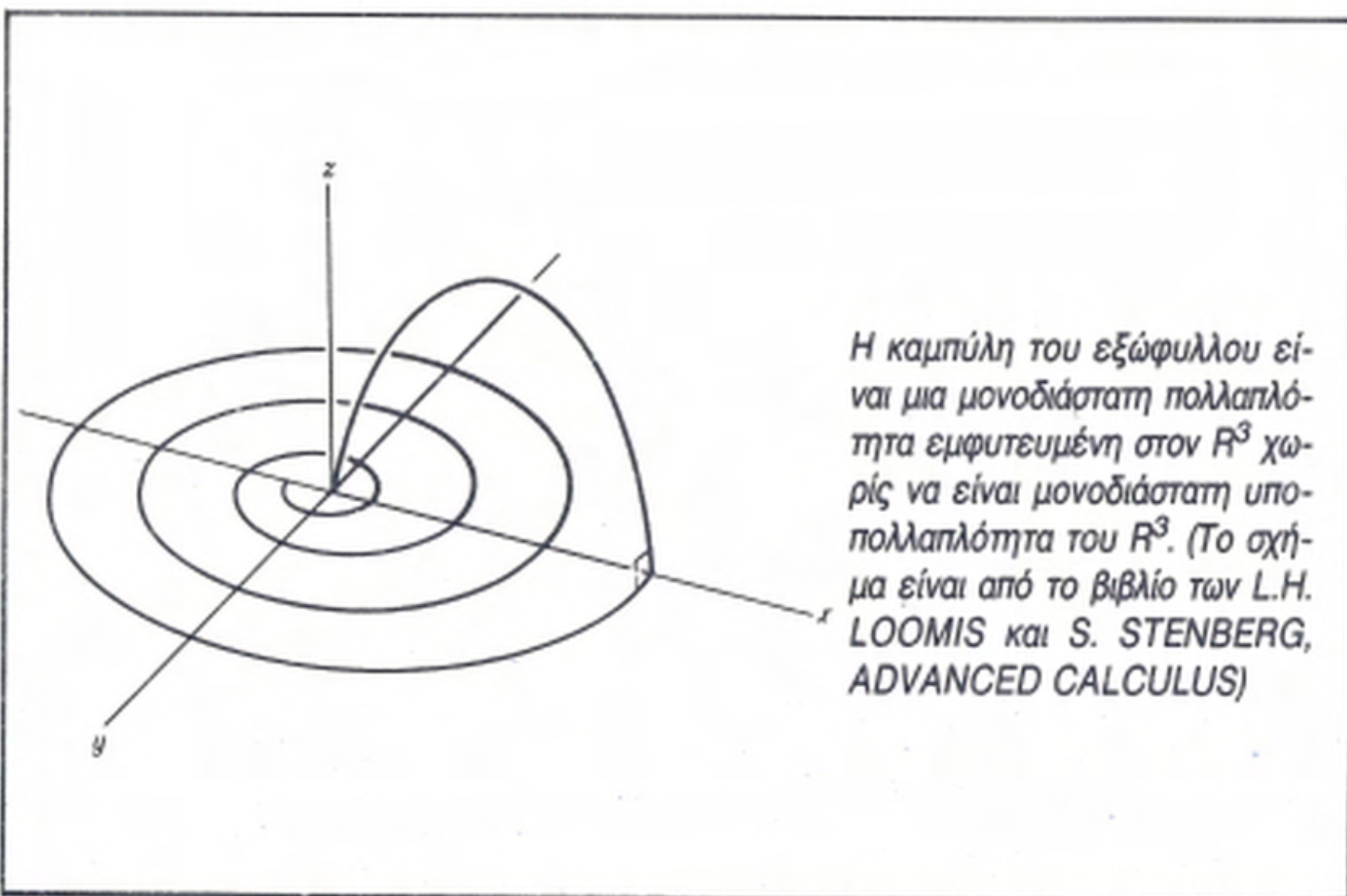
ΣΥΝΤΑΚΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΓΙΑΝΝΑΚΟΠΟΥΛΟΣ Β.
ΔΗΜΑΚΟΣ Γ.
ΚΙΣΚΥΡΑΣ Χ.
ΚΟΛΥΒΑΣ Σ.
ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗΣ Δ.
ΚΩΤΣΙΟΣ Σ.

ΜΑΚΡΙΔΗΣ Θ.
ΜΩΡΑΤΗΣ Π.
ΝΤΑΝΗΣ Γ.
ΣΤΡΑΤΗΣ Γ.
ΤΕΛΩΝΗΣ Π.
ΧΑΣΑΠΗΣ Δ.

ΥΠΕΥΘΥΝΟΙ ΑΠΟ Δ.Σ.

Κισκύρας Χ.
Κοντογιάννης Δ.
Γιαννακόπουλος Β.



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ERWIN NEUENSCHWANDER , Το παράδειγμα του Riemann για μια συνεχή μη διαφορίσιμη συνάρτηση. (Απόδοση: Γ. Μαμωνά)	1
2. KIRSTI ANDERSEN , Οι μαθηματικές τεχνικές στην εργασία του Fermat πάνω στο νόμο της διάθλασης. (Απόδοση: Σ. Κώτσιος, Γ. Στρατής)	9
3. DAVE HEWITT , Ο H.S.M. Coxeter είναι γεωμέτρης. (Απόδοση: Τ. Πατρώνης)	20
4. MILOS DOSTAL-RALPH TINDELL , Η Επιστροφή... του θεωρήματος JORDAN. (Απόδοση: Π. Μωράτης, Σ. Κώτσιος)	24
5. Δ.Γ. ΚΟΝΤΟΓΙΑΝΝΗ , Παρατηρήσεις σ' ένα άρθρο της Μ.Ε. τ. 31	52
6. S. BILCHEV-E.A. VELIKOVA , Μετασχηματισμοί στο τρίγωνο κι εφαρμογές. (Απόδοση: Δ. Κοντογιάννης)	55
7. Θ. ΕΞΑΡΧΑΚΟΣ , Αριθμητικά Συστήματα	65
8. Η ΣΤΗΛΗ ΤΩΝ ΟΛΥΜΠΙΑΔΩΝ , (Επιμέλεια: Δ. Γ. Κοντογιάννης)	112
9. ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗ	114

Το παράδειγμα του Riemann για μια συνεχή μη διαφορίσιμη συνάρτηση

ERWIN NEUENSCHWANDER
Division of History of Science
University of Zurich, Switzerland
μετάφραση - σχόλιο: Γιάννα Μαρωνά

Περίληψη

Το παράδειγμα του Riemann για μια συνεχή, «μη διαφορίσιμη» συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\eta^n x)}{\eta^n}$ είναι γνωστό πάνω από 100 χρόνια. Παρόλα αυτά τα ερωτήματα τόσο μαθηματικής όσο και ιστορικής φύσης που πηγάζουν από αυτό είναι ακόμη μόνο μερικώς λυμένα. Ο Gerver πρόσφατα πέτυχε νέα ουσιώδη αποτελέσματα που αφορούν τα μαθηματικά της συνάρτησης του Riemann. Στο άρθρο αυτό παρουσιάζονται πρώτα μια συνολική εικόνα όσων είναι γνωστά μέχρι τώρα και κατόπιν μερικά καινούργια ιστορικά στοιχεία που προέρχονται από το *Nachlass* του Casorati που πρόσφατα ανακάλυψε ο συγγραφέας.

Στην αρχή του 19ου αιώνα η πλειονότητα των μαθηματικών πίστευε ότι μια συνεχής συνάρτηση είναι και διαφορίσιμη με εξαίρεση ελάχιστα απομονωμένα ιδιόμορφα σημεία.

Ο Ampère¹ μάλιστα προσπάθησε να αποδείξει αυτόν τον ισχυρισμό σε μια εργασία που γράφτηκε το 1806. Ο ίδιος ο Cauchy, ο οποίος έδωσε σαφείς ορισμούς της συνέχειας και της διαφορισιμότητας, υπέθετε αρκετά συχνά στις αποδείξεις του ότι οι συνεχείς συναρτήσεις είναι και διαφορίσιμες².

Οι εργασίες των Fourier και Dirichlet στη θεωρία των Σειρών Fourier οδήγησε σε μια ουσιαστική διεύρυνση της έννοιας της συνάρτησης.

1. Το σχετικό απόσπασμα από τον Weierstrass στο (15), σελίδα 71, όπως επίσης και η περικοπή από το (5) στη σελ. 41.
2. Πάνω απ' όλα στο (2), σελ. 58. Στη δεύτερη έκδοση αυτής της εργασίας, ο Cauchy, μετά από διαμάχη με τον Liouville και τον Sturm, διεύρυνε τις υποθέσεις του θεωρήματός του και την υπόθεση της συνέχειας της συνάρτησης προσέθεσε επίσης την ύπαρξη συνεχούς παραγώγου.

Από τότε και στο εξής, δεν θα μπορούσε κανείς να περιοριστεί στη μελέτη μόνο των συναρτήσεων που είναι αναλυτικές με την έννοια του Euler (για τις οποίες η παραπάνω παραδοχή είναι βέβαια σωστή).

Έπρεπε επίσης να λαμβάνονται υπόψη οι λεγόμενες «αυθαίρετες» συναρτήσεις, οι οποίες, όπως έδειξε ο Dirichlet [(4), 1829] μπορούν επίσης να αναπτυχθούν σε σειρές Fourier (δηλ. σαν άθροισμα αναλυτικών συναρτήσεων) κάτω από ορισμένες συνθήκες.

Στην περίφημη Υφηγεσία «Περί της παραστάσεως συναρτήσεως μέσω μιας τριγωνομετρικής σειράς» [(13), 1854/68], ο Riemann προσπάθησε να βρει αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να είναι δυνατή η παράσταση μιας συνάρτησης με σειρές Fourier.

Στα κεφάλαια 4 και 5 της εργασίας του αυτής, γενίκευσε την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος. Απέδειξε ότι μια φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν δεχτούμε ότι: το διάστημα ολοκλήρωσης είναι αρκετά λεπτά διαμερισμένο, το ολικό μήκος των διαστημάτων στα οποία η κύμανση της συνάρτησης ξεπερνά ένα δοσμένο φράγμα μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρό.

Σαν παράδειγμα, ο Riemann δίνει στο κεφάλαιο 6 την παρακάτω συνάρτηση,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\eta x)}{n^2}$$

$$(x) = \begin{cases} x - k_0 & \text{αν } k_0 < x < k_0 + \frac{1}{2} \\ x - k_0 + 1 & \text{αν } k_0 + \frac{1}{2} < x < k_0 + 1 \end{cases}$$

$k_0 \in \mathbb{Z}$ δηλ. $k_0 = [x]$

η οποία μεταξύ δυο οιονδήποτε σημείων, όσοδήποτε κοντά ευρίσκονται, είναι α-συνεχής σε άπειρα σημεία, αλλά παρόλα αυτά ολοκληρώσιμη.

Η εργασία αυτή του Riemann αποδείχτηκε εξαιρετικά χρήσιμη σε διάφορες περιοχές της μαθηματικής έρευνας. Οδήγησε, μεταξύ άλλων, σε μια βαθύτερη μελέτη της έννοιας του ολοκληρώματος, των τριγωνομετρικών σειρών και της δομής των πραγματικών αριθμών³. Επίσης προώθησε την κατασκευή των παθολογικών συναρτήσεων. Τα παραδείγματα που έδωσε ο Riemann για τέτοιου είδους συναρτήσεις μελετήθηκαν στο Βερολίνο πολύ νωρίτερα απ' ό,τι πιστευόταν πριν. (Βλέπε παρακάτω).

Το πρώτο δημοσιευμένο παράδειγμα μιας συνεχούς πουθενά διαφορίσιμης συνάρτησης δόθηκε από τον Weierstrass [(15), 1872/95]:

3. Για τις σχέσεις μεταξύ της εργασίας του Riemann και της θεωρίας συνόλων του Cantor βλέπε (3).

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x \pi)$$

a περιττός ακέραιος

b θετικός και μικρότερος της μονάδας $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$

Το παράδειγμα αυτό παρουσιάστηκε από τον Weierstrass στην Βασιλική Ακαδημία των Επιστημών, στο Βερολίνο στις 18 Ιουλίου 1872 και μετά δημοσιεύθηκε με την έγκρισή του από τον du Bois-Reymond [(5), 1875].

Πριν τη δημοσίευσή του ο Weierstrass [γράμμα Nov. 23, 1873; (11), σελ. 199-201] έγραψε στον du Bois Reymond ότι, απ' όσο ήξερε, ο Riemann είχε οριστικά ισχυριστεί ήδη από το 1861 περίπου ότι η συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ «δεν έχει

παράγωγο». Ο Riemann, παρόλα αυτά, δεν είχε ανακοινώσει την απόδειξή του γι' αυτό, αλλά είχε απλώς δείξει, περιστασιακά, ότι η απόδειξη προήλθε από τη θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων. Ο Weierstrass δεν μπορούσε επίσης να ανακαλύψει εάν ο Riemann είχε ισχυρισθεί ότι αυτή η συνάρτηση δεν είχε πουθενά παράγωγο. Πίστευε, παρόλα αυτά, [(15), p. 72] ότι: «Ο Riemann είχε υπόψη του μόνο συναρτήσεις, οι οποίες δεν έχουν παράγωγο για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής x». Σ' αυτά τα πλαίσια ο Weierstrass παρατήρησε επίσης ότι η απόδειξη για το ότι η συνάρτηση του Riemann έχει αυτή την ιδιότητα φαίνεται να είναι μάλλον δύσκολη και ότι μπορεί κάποιος να βρει πιο απλά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων που δεν διαφορίζονται πουθενά στο πεδίο ορισμού τους.

Σαν επακόλουθο του παραδείγματος του Weierstrass ένα πλήθος από συνεχείς πουθενά διαφορίσιμες συναρτήσεις παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν. [Βλέπε, για παράδειγμα, τις αναφορές στο (10), σελίδα 1091].

Μια βαθύτερη εξέταση της συνάρτησης του Riemann επιτεύχθηκε μόνο από τον Hardy [(19), 1916]. Ο Hardy απέδειξε ότι η συνάρτηση του Riemann δεν έχει πεπερασμένη παράγωγο σε κανένα σημείο π ξ, όπου το ξ είναι άρρητος ή ρητός της μορφής $\frac{2A}{4B+1}$ ή $\frac{2A+1}{2B}$ (A και B ακέραιοι)⁴. Ο Gerver [(7), 1970] συνέχι-

σε τις προσπάθειες του Hardy και επέτυχε να δείξει με κατ' ευθείαν υπολογισμούς ότι για ρητό ξ της μορφής $\frac{2A+1}{2B+1}$ η συνάρτηση του Riemann έχει αντιθέτως την πεπερασμένη παράγωγο $-\frac{1}{2}$! Για ορισμένες ρητές τιμές του ξ η συμπερι-

φορά της συνάρτησης είναι ακόμη άγνωστη. Αφού ο Gerver έδειξε τελικά ότι η συνάρτηση του Riemann στην πραγματικότητα δεν ανήκει στην κλάση των συνεχών αλλά πουθενά διαφορίσιμων συναρτήσεων, έγινε ακόμη πιο ενδιαφέρον για

4. Ο Gerver διορθώνει χωρίς κανένα σχόλιο το $\frac{2A+1}{2B}$ στο $\frac{2A+1}{2(2B+1)}$.

τον ιστορικό των μαθηματικών να γνωρίζει επακριβώς τη διατύπωση του ισχυρισμού του Riemann.

Είναι σωστός ο Gerver όταν γράφει στην αρχή της εργασίας του ότι ο Riemann έχει δίκιο να ισχυρίζεται [(5), (15)] ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

δεν είναι «διαφορίσιμη σε κάθε σημείο»; Πρέπει πρώτα να ξεκαθαρίσουμε σε σχέση με αυτό, ότι ο ισχυρισμός του Gerver βασίζεται σε μια προφανώς λανθασμένη μετάφραση η οποία δυστυχώς βρίσκεται και σε άλλους συγγραφείς. Οι εκφράσεις "Nicht-differentiirbarkeit", "Keine Ableitung besitzen" στα [(5), (11), (15)] που χρησιμοποιήθηκαν μέχρι τώρα σίγουρα δεν αποδίδονται σαν «πουθενά διαφορίσιμες». Τα αμφισβητούμενα μέρη αποδίδονται στην καλύτερη περίπτωση από την μάλλον ασαφή έκφραση «μη διαφορίσιμες» όπως θα γίνει εδώ.

Αυτό είναι ιδιαίτερα σαφές στο άρθρο του du Bois-Reymond [(5), σελ. 28]:

Nachdem Ampères Beweis für das allgemeine Vorhandensein eines Differentialquotienten lange Zeit die öffentliche Meinung der Mathematiker beherrscht hatte, ist seit einigen Jahren wohl hauptsächlich in Deutschlands mathematischen Kreisen von der Möglichkeit von Functionen ohne Differentialquotienten die Rede, besonders seitdem Riemanns Schüler verkündeten, ihr Lehrer habe von der Reihe mit dem Gliede $\frac{\sin p^2 x}{p^2}$ die Nichtdifferentiirbarkeit behauptet. Diese Reihe solle für gewisse, in jedem noch so kleinen Intervalle unbegrenzt oft wiederkehrende Werthe von x keinen endlichen bestimmten Differentialquotienten zulassen. Einen Beweis hierfür hat unseres Wissens keiner der Riemannschen Schüler zu Papiere gebracht, indessen ist nach einer Mittheilung des Herrn Weierstrass die Riemannsche Behauptung richtig.

Επιπλέον θα έπρεπε να προσέξουμε ότι αυτός ο λεπτομερής ισχυρισμός του du Bois-Reymond είναι φανερά σε διάσταση με την προαναφερόμενη υπόθεση του Weierstrass [(15), p. 72] ότι ο Riemann θεώρησε τη συνάρτησή του πουθενά διαφορίσιμη. Ακόμη κι αν τα κείμενα που ανακαλύφθηκαν πρόσφατα από τον Nachlass

του Casorati δεν επιλύουν οριστικά το επίμαχο ερώτημα, ωστόσο ενισχύουν τον ισχυρισμό του du Bois-Reymond από πολλές απόψεις. Επίσης έχουν το αξιοσημείωτο πλεονέκτημα ότι είναι σχεδόν 10 χρόνια παλαιότερα από τα κείμενα που χρησιμοποιήθηκαν έως τώρα. Το πρώτο απόσπασμα που αναφέρεται στην ερώτησή μας ευρίσκεται στις σημειώσεις του Casorati και αφορούν τις συζητήσεις του με τον Kronecker το φθινόπωρο του 1864. Από αυτό συνάγεται ότι ήδη εκείνον τον καιρό στο Βερολίνο μελετούσαν γενικεύσεις της συνάρτησης του Riemann⁵.

Ο Kronecker γνωρίζει συναρτήσεις που δεν επιδέχονται διαφορικούς τελεστές, και δεν παριστάνουν γραμμές κ.ο.κ. Η συνάρτηση (σειρά)

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^\beta} = f(x) \text{ είναι συγκλίνουσα και συνεχής για } \beta > 1;$$

ενώ η σειρά

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta} \cos n^2 x \text{ δεν συγκλίνει κατ' ανάγκη...}$$

Η συνάρτηση αυτή καθαυτή (μου φαίνεται, είτε ο Kronecker) δεν μπορεί να παριστάνει γραμμή γιατί πρέπει να είναι άπειρα κυματοειδής σε οποιοδήποτε διάστημα.

Το δεύτερο απόσπασμα το οποίο είναι ακόμη περισσότερο ενδιαφέρον βρίσκεται στις σημειώσεις του Casorati, των συζητήσεών του με τον Prym, (έναν από τους μαθητές του Riemann!) που πέρασε αρκετό χρόνο στο σπίτι του Riemann στην Ιταλία την άνοιξη του 1865.

Στο δρόμο του προς τα εκεί (Φεβρουάριος), και ξανά στο γυρισμό του (Ιούνιος), ο Prym επισκέφτηκε τον Casorati με τον οποίον επίσης αλληλογραφούσε⁶.

Στη δεύτερη συνάντηση, στις 25 Ιουνίου, η συζήτηση φαίνεται να στράφηκε στη διαφορισμότητα της συνάρτησης $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}$. Οι προσωπικές σημειώσεις του Casorati γι' αυτό αναφέρουν τα ακόλουθα (σημείωση: το αντίγραφο του αρχικού κειμένου στα ιταλικά παρατίθεται στο τέλος του άρθρου).

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2} \quad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[n^2(x+h)] - \cos[n^2(x-h)]}{n^2 \cdot 2h} = \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x) \sin(n^2 h)}{n^2 h} \end{aligned}$$

5. Για τη συζήτηση στο κομμάτι αυτό, καθώς και το πρωτότυπο απόσπασμα στα ιταλικά βλέπε την προηγούμενη δημοσίευσή μου (12).

6. Βλέπε (12) Στα γράμματά του στον Prym, ο Casorati μάλλον συχνά έθετε ερωτήσεις που αφορούσαν τις εργασίες του Riemann.

$$\frac{h}{2\pi} = \frac{p}{q} \quad (1)$$


(1) Εάν το x δεν παραμένει πεπερασμένο η [σχέση] $\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$ δεν μπορεί πλέον να αποδειχθεί.

Επομένως αναζητούμε την παράγωγο της $f(x)$ από τον τύπο

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = -\sum_1^{\infty} \frac{\sin n^2 x \cdot \sin n^2 h}{n^2 h}$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει πάντοτε όταν $\frac{h}{2\pi}$ είναι σύμμετρος [ρητός] και αποκλίνει στις άλλες περιπτώσεις.

Αυτό, είπε, μπορεί κανείς να το αποδείξει (αν θυμάμαι σωστά) αν χωρίσει την όλη παράσταση σε δυο μέρη στην πρώτη περίπτωση (πιθανόν) και σε τρία μέρη στη δεύτερη.

Έτσι η γραμμή $y = f(x)$ δεν έχει εφαπτόμενες εάν το δεύτερο σημείο μιας τεμνούσης πλησιάζει το πρώτο, το οποίο υποτίθεται ότι είναι σταθερό. Η διεύθυνσή του δεν πλησιάζει μια καθορισμένη οριακά διεύθυνση αλλά ταλαντεύεται. Αυτό μας οδηγεί να αποδώσουμε στη συνάρτηση τη μορφή  που έχει άπειρα μέγιστα και ελάχιστα.

Η ερμηνεία του ζητήματος αυτού δεν είναι καθόλου απλή. Όπως παρουσιάζεται εδώ στην πραγματικότητα είναι λάθος.

Η σειρά $-\sum_1^{\infty} \frac{\sin(n^2 x) \cdot \sin(n^2 h)}{n^2 h}$ συγκλίνει για h αυθαίρετο. Το λάθος στον ισχυρισμό δε μπορεί παρ' όλ' αυτά να αποδοθεί αμέσως στον Riemann. Και ο Prym και ο Casorati είχαν δυσκολίες να καταλάβουν τις θεωρίες του Riemann⁷.

Ακόμη θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο Casorati φαίνεται να έγραφε τις σημειώσεις του μετά τη συζήτηση και συχνά δεν θυμάται επακριβώς τι ειπώθηκε.

Βασισμένος τώρα στα κείμενα που έχω στη διάθεσή μου κλίνω στην άποψη να διορθώσω το $\frac{h}{2\pi}$ σε $\frac{x}{2\pi}$. Ο ισχυρισμός τότε ακόμη δεν θα είναι εντελώς σωστός, αλλά τουλάχιστον θα έχει νόημα:

Η παράσταση $-\sum_1^{\infty} \frac{\sin(n^2 x) \cdot \sin(n^2 h)}{n^2 h}$ έχει, σύμφωνα με τον Gerver, πεπερασμένο όριο καθώς $h \rightarrow 0$ όταν το x είναι σύμμετρος με το 2π (για συγκεκριμένο x). Από την άλλη, όταν το x είναι ασύμμετρο με το 2π , μπορεί, σύμφωνα με τον Hardy, να μην έχει ποτέ ένα πεπερασμένο όριο· πράγματι η συνάρτηση $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2 x)}{n^2}$ δεν

7. Βλέπε (12).

έχει πεπερασμένη παράγωγο για το δεύτερο τύπο του x .

Ο ισχυρισμός που βασίζεται στο διαχωρισμό της σειράς σε τρία μέρη όπως προαναφέρθηκε παραπάνω στο κείμενο, βρίσκεται επίσης στην απόδειξη του Gerver όπως και σε ένα άλλο μέρος της εργασίας του Riemann [(12), σελ. 232]. Επιπλέον η προσοχή εφιστάται στο γεγονός ότι οι μελέτες του Riemann και του Hardy έχουν ορισμένα κοινά σημεία⁸. Επομένως μου φαίνεται ότι η απόδειξη του Gerver ευρίσκεται εξ ολοκλήρου στο πεδίο των πιθανών δυνατοτήτων του Riemann. Το μέχρι πού έφθασε ο Riemann, στην ανάλυση της συνάρτησης στην πρώτη από τις δυο περιπτώσεις, στην οποία ο x είναι σύμμετρος με το 2π , μπορεί να προσδιοριστεί μόνο σε βάση των νέων κειμένων⁹. Σε κάθε περίπτωση μου φαίνεται ότι ο Riemann είχε προηγήσει πολύ πιο μακριά στη μελέτη της συνάρτησης αυτής απ' ότι πιστευόταν μέχρι τώρα.

REFERENCES

1. Ampère, A.M.: Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées..., Journal Ecole polyt., cah. 13, 148-181 (1806)
2. Cauchy, A.: Résumé d'un mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites. In: Oeuvres, Ser. II, Vol. 12, p. 48-112
3. Dauben, J.W.: The Trigonometric Background to Georg Cantor's Theory of Sets. Archive for History of Exact Sciences 7, 181-216 (1971)
4. Dirichlet, P.G.: Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données. Journal für die reine und angewandte Mathematik 4, 157-169 (1829)
5. Du Bois-Reymond, P.: Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. Journal für die reine und angewandte Mathematik 79, 21-37 (1875)
6. Dugac, P.: Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. Archive for History of Exact Sciences 10, 41-176 (1973)

8. Σύγκρινε π.χ., Riemann [(13), σελ. 249f και (14)] με Hardy [(8), σελ. 193 ff].

9. Δεν θα ήταν σχεδόν καθόλου εύκολο να βρει κανείς νέα κείμενα. Σύμφωνα με τον Weierstrass [(15), σελ. 71] δεν αναφέρεται τίποτε περισσότερο στις εργασίες που άφησε ο Riemann, από δε την Πανεπιστημιακή Βιβλιοθήκη του Würzburg πληροφορούμεθα ότι το "Nachlass" του Prym κάηκε μετά το θάνατό του.

7. Gerver, J.: The Differentiability of the Riemann Function at certain rational multiples of π . *American Journal of Mathematics* 92, 33-55 (1970)
8. Hardy, G.H., Littlewood, J.E.: Some Problems of Diophantine Approximation. *Acta Mathematica* 37, 155-239 (1914)
9. Hardy, G.H.: Weierstrass's Non-Differentiable Function. *Transactions of the American Mathematical Society* 17, 301-325 (1916)
10. Montel, P., Rosenthal, A.: Integration und Differentiation in *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* Vol. II/3, p. 1031-1135, Leipzig 1923-1927
11. Nörlund, N.E.: Briefe von K. Weierstrass an Paul du Bois-Reymond. *Acta Mathematica* 39, 199-225 (1923)
12. Neuenschwander, E.: Der Nachlass von F. Casorati (1835-1890) in Pavia. *Archive for History of Exact Sciences* (to appear)
13. Riemann, B.: Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Habilitation essay (1854). In: *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*. Vol. 13, p. 87-132 (1868) = *Gesammelte Mathematische Werke*, p. 213-253, Leipzig 1876
14. Riemann, B.: Fragmente über die Grenzfälle der elliptischen Modulfunctionen. Edited with a commentary by R. Dedekind, in: *Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, p. 427-447, Leipzig 1876
15. Weierstrass, K.: Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen (read 1872). In: *Mathematische Werke von Karl Weierstrass*. Vol. 2, p. 71-76, Berlin 1895

Σημείωση Μεταφράστριας

Ο Bolzano, γύρω στο 1830, ήταν ο πρώτος που κατασκεύασε μια συνεχή μα πουθενά διαφορίσιμη καμπύλη. Αλλά η κατασκευή ήταν γεωμετρική και ο Bolzano δεν έδωσε εξίσωση για αυτή την καμπύλη. Ίσως δεν θεώρησε καν ότι αντιπροσώπευε συνάρτηση. Πολύ αργότερα το 1922 ο Ryshlik απέδειξε ότι η καμπύλη (συνάρτηση) του Bolzano δεν ήταν πουθενά διαφορίσιμη.

Βλέπε Hahn, Hans (1956) "The Crisis in intuition", στο J.R. Newman (ed.). *The World of Mathematics*, New York, Simon and Schuster, pp. 1956-1976.

Οι μαθηματικές τεχνικές στην εργασία του Fermat πάνω στο νόμο της διάθλασης

KIRSTI ANDERSEN

Τμήμα Ιστορίας της Επιστήμης
Πανεπιστήμιο του ÅRHUS

Απόδοση από τους:
Σ. Κώτσιο - Γ. Στρατή

Περίληψη

Αυτό το άρθρο σκοπεύει να επεξηγήσει τους, όχι και τόσο προφανείς, υπολογισμούς του Fermat που είναι σχετικοί με την εργασία του πάνω στη διάθλαση και περιέχονται στο έργο του *Analysis ad refractiones* (1662). Ακόμη να περιγράψει το σκεπτικό που τον οδήγησε σ' αυτούς τους υπολογισμούς. Στα 1657 ο Fermat προσπάθησε να μορφώσει ένα νόμο για τη διάθλαση στηριζόμενος στην αρχή ότι το φως ακολουθεί το συντομότερο δρόμο μεταξύ δυο σημείων. Δεν το πέτυχε γιατί ανακάλυψε ότι οι υπολογισμοί ήταν πολύ μεγάλοι και ανιαροί. Οι υπολογισμοί είναι πράγματι περίπλοκοι, αλλά αν ο Fermat, στα 1657, ήταν πρόθυμος να δεχθεί το νόμο του Descartes για τη διάθλαση, θα είχε πιθανώς δει ότι θα έλυne το πρόβλημα. Όμως ο Fermat ήταν της γνώμης ότι ο νόμος του Descartes ήταν λάθος και έτσι δεν περίμενε να αλλάξει τους υπολογισμούς ουσιαστικά, ανακάλυψε ότι οδηγούσαν στο νόμο των ημιτόνων του Descartes.

Εισαγωγή

Στα 1662 ο Pierre de Fermat έγραψε δυο σύντομες διατριβές πάνω στη διάθλαση. Η πρώτη, *Analysis ad refractiones*, περιέχει μια απόδειξη του νόμου της διάθλασης στηριζόμενη στην αρχή ότι το φως ακολουθεί το δρόμο που η αντίσταση στην κίνησή του είναι ελάχιστη [Fermat 1891, I, 170-172]. Ο Fermat υπόθεσε ότι η ταχύτητα του φωτός σ' ένα μέσο είναι αντίστροφα ανάλογη με την πυκνότητα ή την αντίσταση του μέσου. Κάτω αυτές τις προϋποθέσεις απέδειξε γεωμετρικά στη δεύτερη διατριβή του *Synthesis ad refractiones*, ότι ο νόμος του για τη διάθλαση ικανοποιεί την υπόθεση ότι το φως ακολουθεί το δρόμο του ελάχιστου χρόνου. [Fermat 1891, I, 173-179].

Στο έργο του *Dioptrique* ο René Descartes είχε βγάλει το νόμο των ημιτόνων, της διάθλασης στηριζόμενος σ' ένα υπόδειγμα όπου μια μπάλλα διαπερνούσε ένα κομμάτι ύφασμα [Descartes 1637, 16-25, 1965, 96-105]. Αν και ο Descartes δεχότανε τη θεωρία ότι το φως διαδίδεται ακαριαία, ισχυριζότανε ότι το φως «μεταφέρεται» πιο εύκολα δια μέσου ενός πυκνού παρά δια μέσου ενός αραιού υλικού. Αυτό είναι τεχνικά αντίθετο με την υπόθεση του Fermat ότι η ταχύτητα του φωτός είναι αντίστροφα ανάλογη με την πυκνότητα του μέσου. Επομένως, ο Fermat περίμενε ότι η αντίληψή του για τη διάθλαση θα οδηγούσε σ' ένα νόμο διαφορετικό από εκείνο του Descartes και εξεπλάγη πολύ όταν αντιλήφθηκε ότι η συλλογιστική του στο *Analysis ad refractiones* έδωσε το αποτέλεσμα του Descartes.

Οι λεπτομέρειες αυτής της ιστορίας περιγράφονται καλά στη βιβλιογραφία, ενώ η μαθηματική τεχνική του Fermat και τα προβλήματά της δεν είχαν τύχει της κατάλληλης προσοχής. Η τεχνική του Fermat είναι ένα παράδειγμα εφαρμογής της *methodus ad disquirendam maximam et minimam* [Fermat 1891, I, 133-136], αλλά περιέχει μερικά έξυπνα χαρακτηριστικά που είναι αξιοσημείωτα.

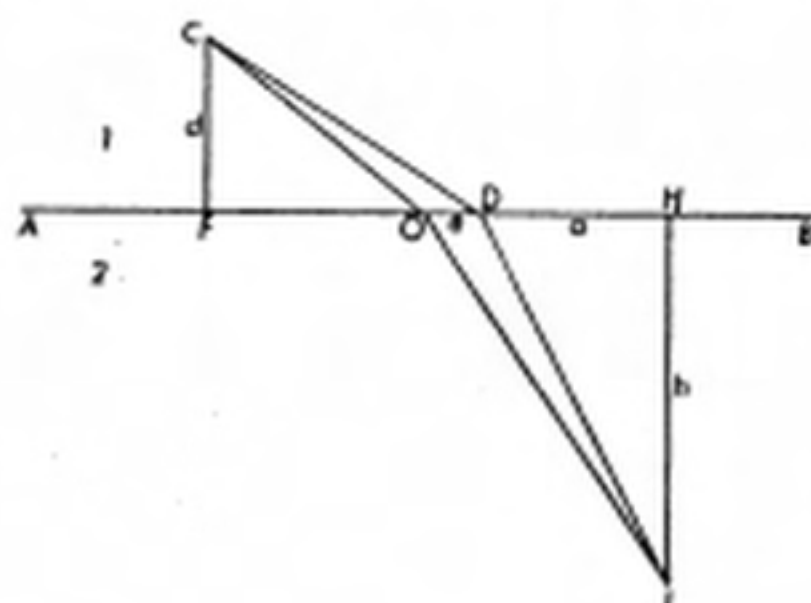
Η προσέγγιση του Fermat στο νόμο της διάθλασης στα 1657

Περισσότερο από τέσσερα χρόνια, προτού γράψει το *Analysis ad refractiones* ο Fermat προσπαθούσε να βγάλει το νόμο της διάθλασης από μια αρχή ελαχίστου. Σ' ένα γράμμα του στον C. De la Chambre, τον Αύγουστο του 1657, διατύπωσε το παρακάτω πρόβλημα: Έστω δυο ομογενή υλικά 1 και 2, που χωρίζονται από μια δοσμένη γραμμή AB. Ας υποθέσουμε ότι μια ακτίνα φωτός περνάει από το G στο I (σχήμα 1). Ζητείται να βρεθεί σημείο D πάνω στην AB με την ιδιότητα: η αντίσταση στην κίνηση του φωτός από G στο I δια μέσου του D να γίνεται ελαχίστη.

Ο Fermat ισχυρίστηκε ότι τα δυο υλικά έχουν συντελεστές αντίστασης r_1 και r_2 . Έτσι ώστε η αντίσταση του υλικού 1 στην κίνηση από το σημείο G στο D μπορεί να εκφραστεί σαν $r_1 \cdot CD$ και, όμοια, η αντίσταση στην κίνηση κατά μήκος του DI σαν $r_2 \cdot DI$. Επομένως η ολική αντίσταση θα δίνεται από το άθροισμα:

$$r_1 \cdot CD + r_2 \cdot DI \quad (1)$$

[Fermat 1894, II, 354-359, κυρίως η 358, ο συμβολισμός άλλαξε]



σχήμα 1

Το γράμμα του Fermat δεν περιείχε μια λύση η οποία να έδειχνε πως το σημείο D θα μπορούσε να κατασκευαστεί έτσι ώστε να ελαχιστοποιεί την (1). Σ' ένα άλλο γράμμα που στάλθηκε την 1 Ιανουαρίου του 1662 στον De la Chambre μαζί με το *Analysis ad refractiones*, ο Fermat εξηγούσε γιατί δεν έλυσε το πρόβλημα που είχε θέσει το 1657. Πρώτα απ' όλα εξέφραζε το φόβο ότι ένας νέος νόμος δεν θα γινότανε δεκτός, γιατί ο νόμος του Descartes είχε κιόλας επαληθευτεί πειραματικά. [Αργότερα ξεπέρασε αυτό το δισταγμό με το επιχείρημα ότι ήταν δυνατόν ο νόμος του Descartes να προσεγγίζει τον «πραγματικό» νόμο έτσι ώστε οι πειραματικοί να μην μπορούν να βρουν τη διαφορά (Fermat 1894, II, 461)]. Μετά συνέχισε:

Το δεύτερο εμπόδιο που συνάντησα στην έρευνά μου ήταν το μάκρος και η δυσκολία των υπολογισμών για τη λύση του προβλήματος που σου ανέφερα στο γράμμα μου (τον Αύγουστο του 1657) το οποίο δεν φαίνεται να είναι από τα εύκολα και στο οποίο από την αρχή εμφανίζονταν τέσσερις τετραγωνικές ρίζες (Fermat 1894, II, 460-461).

Είναι εύκολο να φανταστούμε πως ο Fermat έφτασε στις τέσσερις τετραγωνικές ρίζες που αναφέρει παραπάνω. Στο σχήμα 1, F η προβολή του G πάνω στην AB και H η προβολή του I. Επιπλέον, έστω FH = l, ΓF = d και HI = h. Όταν οι θέσεις των G και I και η διαχωριστική γραμμή μεταξύ των δυο υλικών AB, δίνονται, τότε τα l, d και h είναι γνωστά. Για να λύσουμε τώρα το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της αντίστασης (1), είναι φυσικό να θέσουμε: DH = a και να ζητήσουμε το a, έτσι ώστε η το άθροισμα

$$r_1[(l-a)^2 + d^2]^{1/2} + r_2[a^2 + h^2]^{1/2} \quad (2)$$

να είναι ελάχιστο.

Για να βρει το d, με τη μέθοδο μεγίστου-ελαχίστου ο Fermat επινόησε την παρακάτω διαδικασία: αντικατέστησε στο άθροισμα (2) το a, με το a + ε, οπότε προκύπτει το άθροισμα:

$$r_1[(l-a-\varepsilon)^2 + d^2]^{1/2} + r_2[(a+\varepsilon)^2 + h^2]^{1/2} \quad (3)$$

Κατόπιν θεώρησε τα αθροίσματα (2) και (3) «περίπου ίσα»:

$$r_1[(l-a)^2 + d^2]^{1/2} + r_2[a^2 + h^2]^{1/2} \sim r_1[(l-a-\varepsilon)^2 + d^2]^{1/2} + r_2[(a+\varepsilon)^2 + h^2]^{1/2} \quad (4)$$

διέγραψε τους κοινούς όρους, διαίρεσε με ε και τελικά εξίσωσε ό,τι απόμεινε. Το αποτέλεσμα ήταν μια εξίσωση του a. Η «εξίσωση» (4) περιέχει τέσσερις τετραγωνικές ρίζες και είναι πιθανώς όμοια με τον τύπο στον οποίο αναφέρεται ο Fermat στο γράμμα του. Αν οι υπολογισμοί, που περιλαμβάνονται σ' αυτήν την «εξίσωση» εκτελεσθούν, είτε κατ' ευθείαν είτε χρησιμοποιώντας μια τεχνική που ανέπτυξε ο Fermat [Fermat 1891, I, 153-158], το αποτέλεσμα θα είναι μια εξίσωση σαν την ακόλουθη [δες (29) στο παράρτημα]:

$$r_1 r_2 a [(l-a)^2 + d^2] - r_1 r_2 (l-a)(a^2 + h^2) =$$

$$= [(l-a)^2 + d^2]^{1/2} (a^2 + h^2)^{1/2} [r^{1/2} (l-a) - r^{1/2} a] \quad (5)$$

Δεν είναι γνωστό αν ο Fermat πραγματικά γνώριζε αυτή την εξίσωση, στο γράμμα του της 1ης Ιανουαρίου 1662 στον De la Ghambre. Το μόνο που υποστήριξε ήταν ότι θα μπορούσε να φτάσει σε «μια ασυνήθιστη και φανταστική αναλογία» μετά από σχοινοτεχνείες και κοπιώδεις υπολογισμούς «και η φυσική του κλίση προς τη νωχέλεια» τον έκαναν να σταματήσει τις περαιτέρω έρευνες [Fermat 1894, II, 461]. Ωστόσο, νομίζω ότι πολύ πιθανά ο Fermat είχε βρει μια εξίσωση όμοια με την (5). Αν και οι υπολογισμοί που οδηγούν σ' αυτή την εξίσωση είναι περίπλοκοι έφτασε σε αποτέλεσμα αφού δεν είναι πιο δύσκολοι από άλλους υπολογισμούς που ο Fermat είχε φέρει σε πέρας. Είναι πολύ πιθανόν ότι το πραγματικό πρόβλημα του Fermat ήταν να συμπεράνει τα πάντα από την (5), επειδή, ανεξάρτητα από το πώς προκύπτει αυτή η εξίσωση, δεν οδηγεί σε μια απλή παράσταση για το a .

Αυτό δεν σημαίνει ότι η μέθοδος μεγίστου-ελαχίστου του Fermat δεν ήταν ένα ικανό εργαλείο για το νόμο της διάθλασης από την αρχή της ελαχίστης αντίστασης, αφού η εξίσωση (5) περιλαμβάνει το νόμο των ημιτόνων. Πράγματι, είναι αλγεβρικά ισοδύναμη με την

$$[(l-a)^2 + d^2]^{1/2} (a^2 + h^2)^{1/2} \{r_1 [(l-a)^2 + d^2] + r_2 (a^2 + h^2)^{1/2}\} \\ - \left\{ \frac{-r_1(l-a)}{[(l-a)^2 + d^2]^{1/2}} + \frac{r_2 a}{(a^2 + h^2)^{1/2}} \right\} = 0 \quad (6)$$

από την οποία μπορεί να προκύψει ο νόμος των ημιτόνων:

$$\frac{l-a}{[(l-a)^2 + d^2]^{1/2}} : \frac{a}{(a^2 + h^2)^{1/2}} = \frac{r_2}{r_1} \quad (7)$$

Όταν ο G.W. Leibnitz, στα 1764, ήθελε να δείξει πόσο αποτελεσματικός ήταν ο νεοαναπτυγμένος λογισμός του, τον χρησιμοποίησε για να πάρει ένα αποτέλεσμα όμοιο με το (7) ελαχιστοποιώντας μια παράσταση όμοια με την (2), [Leibnitz 1908, 9-10].

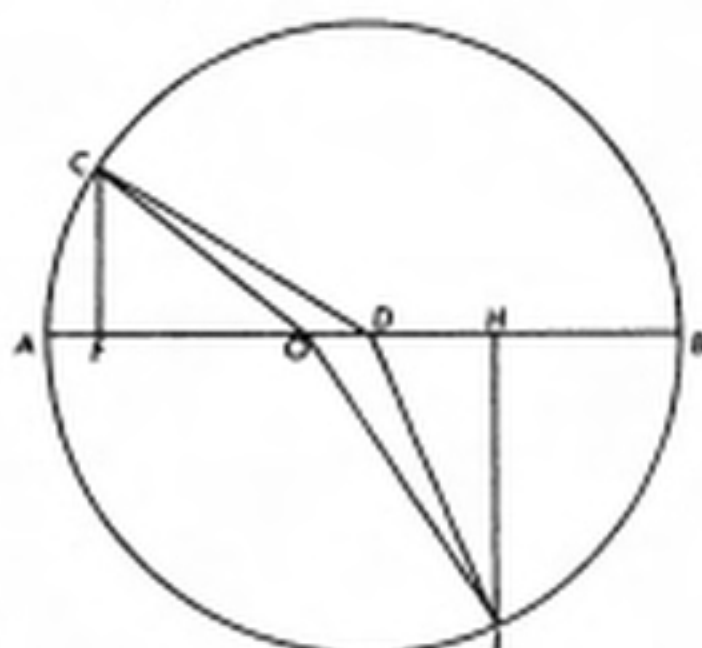
Ο Fermat δεν ήταν στα 1657 προετοιμασμένος να δεχθεί το νόμο των ημιτόνων του Descartes σαν λύση στο πρόβλημά του και νομίζω ότι αυτός είναι ο λόγος που δεν βρήκε την (7) σαν λύση της εξίσωσης (5). Επειδή δεν ήταν σε θέση να βρει μια απλή παράσταση για το a από την (5) το παράτησε το πρόβλημα.

Ο Fermat ξανάρχισε να ασχολείται με το νόμο της διάθλασης μετά από παράκληση του De la Chambre. Όπως γλαφυρά γράφει, στο γράμμα του της 1ης Ιανουαρίου ο De la Chambre τον παρότρυνε να ακολουθήσει έναν άλλο απλούστερο δρόμο για να διευκολυνθεί στους υπολογισμούς. [Fermat 1894, II, 461]. Ο Fermat περιγράφει τους

απλοποιημένους υπολογισμούς του στο *Analysis ad refractiones* χρησιμοποιώντας ένα πολύ συνοπτικό τρόπο στον οποίο δεν εξηγούνται πλήρως όλα τα βήματα.

Έτσι η απόδειξή του έμοιαζε με μαγικό τρικ. Προχώρησε θεωρώντας CD , μια τυχαία ακτίνα και σχεδιάζοντας τον κύκλο με κέντρο D και ακτίνα CD . (σχήμα 2). Μετά υποστήριξε ότι αναζητούσε το σημείο I , ως τη τομή της διαθλωμένης ακτίνας με τον κύκλο.

Αυτή η τοποθέτηση του προβλήματος τον διαφοροποιούσε από τη διατύπωση του 1657 όχι μόνο γιατί έμπαινε κάποιος κύκλος, αλλά και διότι στα 1657 ο Fermat είχε υποθέσει ότι τα σημεία G και I δινόντουσαν και μετά αναζητούσε τη θέση του σημείου D στο οποίο γινότανε η διάθλαση. Στην *Analysis ad refractiones* έθετε μια πιο φυσική ερώτηση: Πώς, μια τυχαία ακτίνα GD , αλλάζει διεύθυνση όταν περνάει από το ένα μέσο στο άλλο;



σχήμα 2

Το επόμενο βήμα του Fermat ήταν να χρησιμοποιήσει την αρχή της ελάχιστης αντίστασης, πράγμα που στην αρχή φαίνεται παράξενο διότι αυτή η αρχή εφαρμόζεται μόνο όταν τα G και I είναι σταθερά σημεία, και ο τρόπος που αντιμετώπιζε το πρόβλημα έδειχνε ότι θεωρούσε το I μεταβλητό. Ωστόσο ο Fermat έκανε ανάλυση στο πρόβλημα. Επομένως μπορούσε να υποθέσει ότι η GDI ήταν ο φυσιολογικός δρόμος (πράγμα που σημαίνει ότι το I είναι σταθερό) και μπορούσε μετά να χρησιμοποιήσει την αρχή της ελάχιστης αντίστασης για να βρει τη θέση του I .

Για να το κάνει αυτό καταρχάς έθεσε:

$$GD = DI = n \quad DF = b \quad (8)$$

και αργότερα, πήρε το λόγο των συντελεστών αντίστασης των δυο μερών να είναι ίσος με

$$b/m (= r_2/r_1) \quad (9)$$

όπου m είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Η θέση του I ορίζεται από τη θέση του H οπότε ο Fermat έθεσε:

$$DH = a \quad (10)$$

και ο σκοπός του έγινε τότε να εκφράσει το a συναρτήσει των δοσμένων μεγεθών.

Η ολική αντίσταση κατά μήκος του GDI είναι ανάλογη με το [δες (8) και (7)]

$$m \cdot GD + b \cdot DI = mn + bn \quad (11)$$

Αφού GDI υποτίθεται ότι είναι η φυσική οδός, έπεται από την αρχή της ελάχιστης αντίστασης ότι η (11) θα είναι ελάχιστη, ως προς την αντίσταση μεταξύ των δρόμων GDI. Αυτές οι αντιστάσεις είναι ανάλογες με [από (9)]

$$m \cdot GO + b \cdot OI \quad (12)$$

θέτοντας $DO = e$ και χρησιμοποιώντας $GO = (GD^2 + DO^2 - 2DO \cdot DF)^{1/2}$ και $OI = (DI^2 + DO^2 + 2DO \cdot DH)^{1/2}$, ο Fermat μπορούσε να εκφράσει την (12) σαν

$$(m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be)^{1/2} + (b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae)^{1/2} \quad (13)$$

Μετά εφάρμοσε τη διαδικασία της μεθόδου μεγίστου-ελαχίστου στην «ισότητα» των (11) και (13). Δεν έκανε τους υπολογισμούς αλλά έδειξε πως θα μπορούσαν να γίνουν. Θα ακολουθήσω τη μέθοδό του, τετραγωνίζοντας και τα δυο μέρη της:

$$mn + bn \sim (m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be)^{1/2} + (b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae)^{1/2} \quad (14)$$

απαλείφοντας τους κοινούς όρους, διαγράφοντας τους όρους που περιέχουν το e στη δεύτερη δύναμη (διότι αυτοί εξαφανίζονται στο τέλος), διαιρώντας με το 2 και απομονώνοντας τις τετραγωνικές ρίζες, προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} bmn^2 + m^2be - b^2ae &\sim (m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be)^{1/2} \\ (m^2n^2 + m^2e^2 - 2m^2be)^{1/2} &\cdot (b^2n^2 + b^2e^2 + 2b^2ae)^{1/2} \end{aligned} \quad (15)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο, διαγράφουμε επίσης τις δευτεροβάθμιες δυνάμεις του e και διαιρούμε με το 2, οπότε οδηγούμαστε στην:

$$b^2m^3n^2e - ab^3mn^2e \sim -b^3m^2n^2e + ab^2m^2n^2e \quad (16)$$

Αυτό οδηγεί στην εξίσωση:

$$b^2mn^2(b+m)(a-m) = 0 \quad (17)$$

$$\text{η οποία έχει τη ρίζα} \quad a = m \quad (18)$$

Το αποτέλεσμα (18) σημαίνει ότι στο σημείο D, στο οποίο λαμβάνει χώρα η διάθλαση, έχουμε:

$$\frac{DF}{DH} = \frac{b}{a} = \frac{b}{m} = \frac{r_2}{r_1} \quad (19)$$

Αυτό μπορεί να ερμηνευτεί σαν ο νόμος των ημιτόνων της διάθλασης. Ο Fermat δεν ανέφερε αυτό το νόμο με σαφήνεια, αλλά τελείωσε την ανάλυσή του λέγοντας ότι όταν δίνονται τα G και D το I θα μπορούσε να το προσδιορίσει, πάνω στον κύκλο, μέσω του DH που δίνεται απ' τη σχέση $DF/DH = b/m$.

Όπως έδειξε ο Michael Mahoney ο Fermat δεν έβρισκε αναγκαίο να δουλεύει και

συνθετικά και αναλυτικά τα συμπεράσματά του. [Mahoney 1973, 388]. Πάντως, η απροθυμία του να δεχθεί το νόμο του Descartes τον παρακίνησε να κάνει μια εξαίρεση και σε σύντομο χρόνο μετά το γράψιμο του *Analysis ad refractiones*, έγραψε το *Synthesis ad refractiones*.

Η ιδέα αυτού του κειμένου μπορεί να περιγραφεί εν συντομία με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω V_1 και V_2 οι ταχύτητες του φωτός στα δύο μέσα. Υποθέτουμε ότι τα G και D δίδονται και ότι το F είναι η προβολή του G πάνω στην AB (σχήμα 2). Έστω ότι το H ορίζεται από τη σχέση:

$$DF/DH = V_1/V_2 \quad (20)$$

και έστω I το σημείο τομής της καθέτου στην AB στο H , και του κύκλου με κέντρο D και ακτίνα GD . (Επειδή ο Fermat ισχυριζόταν ότι η ταχύτητα του φωτός είναι αντιστρόφως ανάλογη του συντελεστή αντίστασης του υλικού, οι σχέσεις (19) και (20) είναι ισοδύναμες). Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μεταξύ αποστάσεων, ταχυτήτων και χρόνων στην ομαλή κίνηση, ο Fermat ήταν σε θέση να δείξει με εντελώς γεωμετρικά επιχειρήματα, ότι αυτή η κατασκευή του I συνεπάγεται ότι ο χρόνος που χρειάζεται το φως για να μετακινηθεί κατά μήκος του δρόμου GDI είναι μικρότερος απ' το χρόνο αν μετακινηθεί κατά μήκος οποιουδήποτε άλλου GDI . Από αυτό ο Fermat συμπέρανε ότι το σημείο I , που κατασκευάζεται από την (20) ήταν το σημείο τομής μεταξύ της διαθλωμένης ακτίνας, που έρχεται από το G και του κύκλου με κέντρο D και ακτίνα GD · με άλλες λέξεις, ο νόμος της διάθλασης δίδεται από την (20).

Σύγκριση των δυο μορφών του προβλήματος

Για να μελετήσουμε τη διαφορά μεταξύ του προβλήματος του 1657 και της *Analysis ad refractiones* πρέπει να στρέψουμε την προσοχή μας στην «εξίσωση» (4), την οποία ο Fermat πιθανώς θεωρούσε στα 1657 και την εξέφραζε σαν

$$f(a) \sim f(a + e) \quad (21)$$

Όπως είδαμε, ο Fermat ο ίδιος δήλωσε ότι στην *Analysis ad refractiones* είχε απλοποιήσει τους πρώτους υπολογισμούς. Ας δούμε αυτές τις απλοποιήσεις. Ο Fermat έκανε δυο αλλαγές: (1) Σχεδίασε έναν κύκλο, και (2) εισήγαγε μια άλλη έκφραση, την $mn + bn -$ που δεν περιείχε την $a -$ για την

$$f(a) = r_1 [(1 - a)^2 + d^2]^{1/2} + r_2 [a^2 + h^2]^{1/2}$$

και εξέφρασε την $f(a + e)$ με όρους των m, n, b, a και e . Τελικά αντιστοίχισε $f(a) = g(e)$, όπου $g(e)$ είναι η παράσταση (13). Αυτή είναι η αλλαγή που πραγματικά είχε σαν αποτέλεσμα την απλοποίηση των υπολογισμών. Επέτρεψε να αντικατασταθούν οι περίπλοκοι υπολογισμοί που περιλαμβάνονται στην παράσταση (4) ή την (21) από κείνους που περιέχει η (14) ή

$$g(o) \sim g(e) \quad (22)$$

Επειδή αυτή η «εξίσωση» περιέχει μόνο δυο τετραγωνικές ρίζες και μόνο τις πρωτοβάθμιες δυνάμεις του a , οδηγεί σε υπολογισμούς πολύ πιο εύκολους από εκείνους της (4), το αποτέλεσμα των οποίων είναι η εξίσωση (17).

Ο κύκλος δεν παίζει αποφασιστικό ρόλο στην απλοποίηση των υπολογισμών· θα μπορούσαμε να πάρουμε αυτά τα αποτελέσματα, χωρίς πολλή δουλειά, αντικαθιστώντας το $f(a)$ με την παράσταση $mp + bp$, όπου $p = DI \neq DG = n$. Ούτε είναι πολύ σπουδαίο ότι το b , στην παράσταση του $f(a + e)$, παίζει ταυτόχρονα και το ρόλο του DF και του συντελεστή αντίστασης· οι υπολογισμοί θα μπορούσαν επίσης να γίνουν αν το $f(a)$ αντικαθίστατο από την παράσταση $r_1p + r_2p$. Η πιο μεγάλη επινόηση του Fermat ήταν να αποφύγει τις δυο τετραγωνικές ρίζες και τα a στην παράσταση $f(a)$.

Οπωσδήποτε, ο κύκλος και οι δυο ρόλοι του b έκαναν τους υπολογισμούς του Fermat πιο εύκολους ιδιαίτερα τον έκαναν να σκεφτεί ότι το αποτέλεσμα, που ήταν τόσο πολύ απρόθυμος να δεχτεί, έπρεπε να είναι ορθό. Έτσι, έγραψε στον De la Chambre στο γράμμα της 1ης Ιανουαρίου:

Έχω επαναλάβει τους αλγεβρικούς μου υπολογισμούς πολλές φορές, και το αποτέλεσμα είναι πάντα το ίδιο. [Fermat 1894, II, 462].

Ακόμα και αφού είχε αναγκαστεί να παραδεχτεί ότι η ανάλυσή του τον οδηγούσε στο νόμο του Descartes ανακάλυψε, για μια φορά, ότι έπρεπε να ξανασιγουρευτεί δίνοντας μια συνθετική απόδειξη του αποτελέσματός του, όπως είδαμε.

Συμπέρασμα

Μπορεί ο αναγνώστης να αναρωτηθεί πώς ο Descartes και ο Fermat μπόρεσαν και έφθασαν στον ίδιο νόμο της διάθλασης, όταν ακολούθησαν αντίθετες αντιλήψεις σχετικά με το πώς διαδίδεται το φως σε διαφορετικά υλικά. Αν και αυτό το ερώτημα δεν σχετίζεται με το θέμα μας, θα σκιαγραφήσω την απάντηση [οι περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στο (Sabra 1967, 119-150)].

Αμφότεροι, και ο νόμος του Descartes και ο νόμος του Fermat, μπορούν να περιγραφούν από την:

$$(\sin \alpha_1) / (\sin \alpha_2) = \text{σταθερό} \quad (23)$$

όπου α_1, α_2 είναι οι γωνίες μεταξύ της κάθετης διεύθυνσης και των ακτίνων του φωτός στο υλικό 1 και στο υλικό 2 αντίστοιχα, και η σταθερή ορίζεται από τα δυο υλικά. Αν και ο Descartes και ο Fermat είχαν διαφορετικές αντιλήψεις σχετικά με την ταχύτητα του φωτός, οι ερμηνείες τους για την (23): συνέπεσαν στο ότι όταν το φως εισέρχεται από ένα λιγότερο πυκνό σ' ένα πιο πυκνό υλικό η ακτίνα πλησιάζει προς την κάθετη. Αυτό έκανε τον Fermat να δηλώσει ότι οι νόμοι τους για τη διάθλαση είναι ίδιοι.

Εισάγοντας την ταχύτητα του φωτός στα δυο υλικά, ο νόμος του Fermat γίνεται, όπως μπορεί κανείς να δει στο *Synthesis* [parábale: (20)].

$$(\sin \alpha_1) / (\sin \alpha_2) = V_1 / V_2 \quad (24)$$

Ο Descartes δεν διατύπωσε το νόμο του έτσι που να παρουσιάζονται οι ταχύτητες με σαφήνεια· ωστόσο μια ανάλυση των ισχυρισμών του δείχνει ότι ο νόμος του είναι ισοδύναμος με τον τύπο:

$$(\sin \alpha_1) / (\sin \alpha_2) = V_2 / V_1 \quad (25)$$

Έτσι φαίνεται ότι το πρόβλημα του Fermat παρουσιάστηκε διότι δεν ανέλυσε τα επιχειρήματα του Descartes με αρκετή φροντίδα και επομένως απέτυχε να καταλάβει γιατί ο σχεδόν κοινός νόμος τους για τη διάθλαση (23) έδινε τους δυο διαφορετικούς τύπους (24) και (25).

Σκοπός αυτής της εργασίας ήταν να εξηγήσει τους υπολογισμούς του Fermat στο *Analysis ad refractiones* και να δείξει τις δυσκολίες του σχετικά με την εξαγωγή του νόμου της διάθλασης. Κατά τη διάρκεια αυτής της ανάλυσης τρία σημεία αναφέρθηκαν: (1) ότι το πρόβλημα του Fermat που λύθηκε στο *Analysis ad refractiones* ήταν όμοιο με το πρόβλημα που διατύπωσε το 1657, (2) ότι η μόνη σημαντική διαφορά μεταξύ του προβλήματος του 1657 και της διαδικασίας *Analysis ad refractiones* είναι ότι ο Fermat εισήγαγε απλοποιημένους υπολογισμούς, (3) ότι οι απλοποιήσεις οδήγησαν σ' ένα αποτέλεσμα το οποίο έκανε τον Fermat να καταλάβει ότι ο σωστός νόμος της διάθλασης ήταν ο νόμος του Descartes.

Παράρτημα

Η μέθοδος του Fermat για τα μέγιστα και ελάχιστα έχει συχνά περιγραφεί με τη γλώσσα του διαφορικού λογισμού. Η γενική εντύπωση είναι ότι η τεχνική του για να δουλέψει στην «εξίσωση»

$$f(a) \sim f(a + e) \quad (26)$$

απλά οδηγεί στην εξίσωση

$$f'(a) = 0 \quad (27)$$

Αυτό είναι χρήσιμο για ορισμένες συναρτήσεις f , όπως π.χ. πολυώνυμα του a . Όταν πάντως η f περιέχει τετραγωνικές ρίζες η μέθοδος του Fermat καταλήγει σε εξισώσεις που είναι πολύ πιο περίπλοκες από την (27).

Ασχολούμενος με το νόμο της διάθλασης ο Fermat θεώρησε συναρτήσεις της μορφής:

$$f(a) = \{[p(a)]^{1/2} + [q(a)]^{1/2}\}^2 \quad (28)$$

όπου $p(a)$ και $q(a)$ πολυώνυμα του a . Σ' αυτήν την περίπτωση η τεχνική στην «εξίσωση» (26) τον οδήγησε στην εξίσωση:

$$p(a) \cdot q'(a) + p'(a) \cdot q(a) = - [p(a) \cdot q(a)]^{1/2} [p'(a) + q'(a)] \quad (29)$$

Με αλγεβρικές πράξεις αυτή η εξίσωση μπορεί να εκφραστεί με όρους της f :

$$[p(a) \cdot q(a)]^{1/2} \{ [p(a)]^{1/2} + [q(a)]^{1/2} \} \cdot \{ 1/2 p'(a) [p(a)]^{-1/2} + 1/2 q'(a) [q(a)]^{-1/2} \} = 0 \quad (30)$$

Από την οποία έχουμε ότι:

$$[p(a) \cdot q(a)]^{1/2} \cdot f(a) \cdot f'(a) = 0 \quad (31)$$

Μπορούμε να πάρουμε την εξίσωση (29) χρησιμοποιώντας τη διαδικασία που ο Fermat ανέπτυξε στο *Ad methodum de maxima et minima appendix* [Fermat, I 1891, 153-158]: Έστω M η ελάχιστη τιμή:

$$M = [p(a)]^{1/2} + [q(a)]^{1/2} \quad (32)$$

$$\text{οπότε} \quad M - [p(a)]^{1/2} = [q(a)]^{1/2} \quad (33)$$

τετραγωνίζοντας έχουμε

$$M^2 + p(a) - q(a) = 2M [p(a)]^{1/2} \quad (34)$$

και ξανατετραγωνίζοντας καταλήγουμε:

$$M^4 = 2M^2[p(a) + q(a)] - [p(a) - q(a)]^2 \quad (35)$$

Αφού το M υποτίθεται ελάχιστο το M^4 θα είναι επίσης ελάχιστο, σκοπός μετά του Fermat είναι να εφαρμόσει τη συνήθη τεχνική για να ορίσει το ελάχιστο στη δεξιά πλευρά της (35) θεωρώντας το M^2 σταθερό. Αυτό σημαίνει ότι από την «ισότητα»

$$2M^2[p(a) + q(a)] - [p(a) - q(a)]^2 \sim 2M^2[p(a + e) + q(a + e)] - [p(a + e) - q(a + e)]^2 \quad (36)$$

μπορεί να βρεθεί μια εξίσωση του a , αφού τα μέλη αυτής της «εξίσωσης» είναι πολυώνυμα, η διαδικασία θα οδηγήσει στη

$$M^2[p'(a) + q'(a)] - [p'(a) - q'(a)] [p(a) - q(a)] = 0 \quad (37)$$

όταν το M αντικατασταθεί από την (32) το αποτέλεσμα γίνεται

$$\{ [p(a)]^{1/2} + [q(a)]^{1/2} \}^2 [p'(a) + q'(a)] - [p'(a) - q'(a)] [p(a) - q(a)] = 0 \quad (38)$$

που είναι ισοδύναμο με την (29).

Μπορούμε να πάρουμε το αποτέλεσμα (29) εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Fermat για τα ακρότατα κατευθείαν στην «ισότητα»

$$[p(a)]^{1/2} + [q(a)]^{1/2} \sim [p(a + e)]^{1/2} + [q(a + e)]^{1/2} \quad (39)$$

τετραγωνίζοντας τις δυο πλευρές έχουμε

$$p(a) + q(a) + 2[p(a)q(a)]^{1/2} \sim$$

$$\sim p(a+e) + q(a+e) + 2[p(a+e)q(a+e)]^{1/2} \quad (40)$$

Αφού $p(a)$ και $q(a)$ πολυώνυμα και οι δευτεροβάθμιες δυνάμεις του e εξαφανίζονται στο τέλος των υπολογισμών, μπορούμε να θέσουμε:

$$p(a+e) = p(a) + p'(a) \cdot e \text{ και } q(a+e) = q(a) + q'(a) \cdot e \quad (41)$$

τότε η (40) γίνεται:

$$2[p(a+e)q(a+e)]^{1/2} \sim 2[p(a)q(a)]^{1/2} + p'(a) \cdot e + q'(a) \cdot e \quad (42)$$

Μια ακόμη τετραγώνιση δίνει (αφού παραλείψουμε τις δευτεροβάθμιες δυνάμεις του e):

$$4p(a+e)q(a+e) \sim 4p(a)q(a) + 4[p(a) \cdot q(a)]^{1/2} [p'(a) + q'(a)] \cdot e \quad (43)$$

Όταν η (41) εφαρμοστεί σ' αυτή, η (29) προκύπτει μετά από διαίρεση με e .

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τον Henk Bos (Utrecht), Ole Knudsen (Århus) και Jerper Lütze (Odense) με τους οποίους συζητήσα μια πρώτη απόδοση αυτής της εργασίας και οι οποίοι έκαναν ουσιαστικές παρατηρήσεις.

REFERENCES

- Descartes, R. 1637/1965. *La Dioptrique*. In *Discours de la méthode*. Leiden, 1637. Reprinted in *Oeuvres de Descartes*, C. Adam and P. Tannery, eds., Vol. VI, Paris, 1902. 2nd ed., Paris, 1965.
- Fermat, P. 1891-1912. *Oeuvres de Fermat*, P. Tannery and C. Henry, eds. 4 vols. Paris.
- Goldstine, H. 1980. *A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century*. New York, Heidelberg, Berlin.
- Hofmann, J. E. 1963. Über ein Extremwertproblem des Apollonios und seine Behandlung bei Fermat. *Nova Acta Leopoldina*, N. F. 27, Nr. 167, 105-113.
- 1965. Pierre Fermat—Ein Pionier der neuen Mathematik. *Praxis der Mathematik* 7, 113-119, 171-180, 197-203. Also as a separate print.
- Leibniz, G. W. 1684/1908. Nova methodus pro maximis et minimis ... *Acta Eruditorum* (1684), 467-473. Reprinted in *Leibnizens mathematische Schriften*, C. I. Gerhardt, ed., Vol. V, pp. 220-226, Halle, 1858. Translated into German in *Leibniz über die Analysis des Unendlichen*, G. Kowalewski, ed., Leipzig, 1908.
- Mahoney, M. S. 1973. *The mathematical career of Pierre de Fermat (1601-1665)*. Princeton, N.J.
- Pedersen, K. and K. Møller. 1971. Variationsregningens tidlige Historie. *Nordisk Matematisk Tidsskrift* 19 (3), 61-74.
- Sabra, A. I. 1967. *Theories of light from Descartes to Newton*. London.

«Ο H.S.M. Coxeter είναι γεωμέτρης»

Του DAVE HEWITT¹
Απόδοση: Τ. Πατρώνης

Ο τίτλος είναι η αρχική φράση από ένα σύντομο αμερικάνικο φιλμ με τίτλο «Διεδρικά καλειδοσκόπια». Είναι μια περίεργη φράση, γιατί κατά κάποιον τρόπο θέλει να περιγράψει τον Coxeter. Είναι σαν να ακούω ότι θα γίνει μια συζήτηση για τον Coxeter και να ρωτάω: «Καλά, και ποιός είναι ο Coxeter;». Κι ύστερα απ' αυτό, η απάντηση να έρχεται με βαριά και καθαρή φωνή: «Ο H.S.M. Coxeter είναι γεωμέτρης!». Ωραία, ευχαριστώ πάρα πολύ, τώρα λοιπόν ξέρω. Θα 'μουνά πολύ ευχαριστημένος, καθώς η ερώτησή μου απαντήθηκε τόσο γρήγορα! Όμως, νιώθω να μου τριβελίζει το μυαλό μια άλλη ερώτηση: «Ναι, αλλά... τι θα πει γεωμέτρης;». Οπωσδήποτε ο Coxeter είναι γεωμέτρης, όπως τόσο ευγενικά με πληροφόρησαν, αλλά ποιος άλλος είναι; Ποιες ιδιότητες πρέπει να έχει κανείς για να θεωρηθεί γεωμέτρης; Ίσως να κερδίζει το ψωμί του δουλεύοντας στο βασίλειο της γεωμετρίας. Ίσως να κερδίζει το ψωμί του με άλλα μέσα, αλλά να έχει αναγνωριστεί η συμβολή του σε πρωτότυπη δουλειά στο πεδίο της γεωμετρίας. Ίσως να είναι γεωμέτρης μονάχα επειδή ξόδεψε ένα αρκετά μεγάλο μέρος του χρόνου του με το να σκέφτεται και να εργάζεται σε τομείς της γεωμετρίας, παρόλο που μπορεί να μην πρόσφερε τίποτα πρωτότυπο, ούτε να είναι ανάγκη να βγάξει το ψωμί του απ' αυτή τη δουλειά.

Άμα περιγράψω τον εαυτό μου, μπορώ να πω ότι είμαι δάσκαλος, κι αυτό θα είναι σωστό, αφού κερδίζω το ψωμί μου απ' το επάγγελμα αυτό. Όταν κουβεντιάζω για τη μουσική, βρίσκω ότι ευχαρίστως περιγράφω τον εαυτό μου σαν κιθαρίστα, κι όμως δεν κερδίζω λεφτά απ' αυτό. Ούτε και είμαι ιδιαίτερα καλός στην κιθάρα, κι έτσι δεν μπορώ να στηρίξω τη δήλωσή μου σε συμβολή στην τέχνη του παιξίματός της. Λίγοι άνθρωποι ξέρουν ότι παίζω και ακόμα λιγότεροι με έχουν ακούσει ποτέ· έτσι δεν μπορώ να ισχυριστώ πως έχω αναγνωριστεί σαν κιθαρίστας. Ούτε καν ασχολούμαι με την κιθάρα τόσο πολύ χρόνο όσο χρειάζεται... Κι όμως! αισθάνομαι ότι είμαι κιθαρίστας. Μπορεί να μην έχω την ταχύτητα και τη δεξιότητα να παίζω σαν τον Robert Fripp από τους King Crimson, ή την έμπνευση και δύναμη του Rick Parfitt από τους Status Quo, αλλά όταν είμαι μόνος με την κιθάρα μου, παρά τις όποιες μου ανικανότητες, νιώθω άνετα και όμορφα μαζί της. Μπορώ να παίζω ήχους που μ' αρέσουν και μ' ενδιαφέρουν. Καθώς παίζω τα γνωστά μου τραγούδια, δοκιμάζω την ακρίβειά μου στο παίξιμο και ερευνώ το συναίσθημα και τη συγκίνηση που μπορεί να μεταπλαστούν σε παίξιμο. Το ίδιο τραγού-

(1) Το άρθρο είναι από το αγγλικό περιοδικό "Mathematics Teaching", τευχ. 117, Δεκέμβριος 1986.

δι μπορεί να ακούγεται τόσο διαφορετικά, ακόμα κι αν οι νότες μένουν οι ίδιες. Το τραγούδι "My Way" («Ο Τρόπος μου») είναι ένα όμορφο παράδειγμα πάνω σ' αυτό, αν συγκρίνουμε την εκτέλεση του Φρανκ Σινάτρα και του Sid Vicious, που και οι δύο τους είναι τόσο δυνατοί, ο καθένας με τον τρόπο του.

Οι συγχορδίες (τα «ακόρντα») φτιάχνονται από έναν αριθμό μέχρι έξι νότες, που καθεμιά αντιστοιχεί σε κάθε χορδή. Αυτό σηκώνει κάποια εξερεύνηση. Τι θα γίνει αν κλείσω τα μάτια και βάλω τα δάχτυλα του αριστερού μου χεριού στις χορδές τυχαία; Τι ήχος θα ακουστεί; Αχ, απάισιος! Αλλά για σιάσου μια στιγμή, αν πά-
ρουμε μαζί μερικές χορδές βγάζουν κάτι ενδιαφέρον. Εντάξει, ας τις κρατήσουμε αυτές. Τώρα ας βάλω τα άλλα δάχτυλά μου κάπου αλλού. Έτσι σιγά-σιγά ερευνώ-
ντας, βρίσκω κι άλλες συγχορδίες.

Πολύ σπάνια, παίζω με μερικούς φίλους μου στο Λονδίνο και στο τέλος του τραγουδιού λέει κάποιος: «Τι ακόρντο ήταν αυτό;». Τότε νιώθω λίγο χαζός και απαντώ μάλλον απολογητικά λέγοντας κάτι τέτοιο: «...ωραίο, εννοείτε». Το ότι πή-
γε καλά δεν οφείλεται στο ότι αυτό που έπαιξα συγκρουόταν με το παίξιμο όλων των άλλων μέχρι τώρα· απλώς ήταν κάτι λιγάκι ασυνήθιστο. Ο φίλος μου κάθεται κάτω, αναλύει τις νότες που αποτελούν τη συγχορδία και μετά από πολλή σκέψη, ξαφνικά, διατυπώνει μια μάλλον πολύπλοκη σειρά λέξεων που φαίνεται πως είναι το όνομά της. Νιώθει τώρα ευτυχής γιατί μπόρεσε να την καθορίσει, και, ξέροντας πως περί τίνος πρόκειται, μπορεί να συμπεράνει ότι πραγματικά θα «πήγαινε» με τις νότες και τ' ακόρντα που έπαιξε η υπόλοιπη κομπανία. Πρώτα το βρίσκω περίεργο να έχει όνομα αυτό το πράγμα· άραγε υπάρχει όνομα για κάθε συλλογή από νότες που φτιάχνουν ένα ακόρντο, όπου κι αν βάλω τα δάχτυλά μου; Ύστερα, το βρίσκω επίσης περίεργο να μπορεί να συνδυάσει το όνομα της συγχορδίας μου με τις νότες και συγχορδίες που έπαιζαν όλοι οι άλλοι, και ν' αποφασίσει ότι πραγματικά ταιριάζανε. Εντυπωσιάστηκα πολύ, αλλά την ίδια στιγμή ένιωσα πως χρει-
αζόταν να κάνει ό,τι έκανε, αντί, απλά, να ακούσει.

Ξέρω τι πράγματα ταιριάζουνε στο άκουσμα, έχω πολύ μικρή ή καθόλου γνώση για τα ονόματα των ήχων που παίζω, ή για το κλειδί ή τα κλειδιά που μπορεί να είναι εκεί. Δεν μπορώ να πω ότι αυτά τα θεωρώ άχρηστη πληροφορία, αφού τέτοι-
ες γνώσεις μπορεί να υποβάλουν καινούργιες διαισθήσεις και καινούργιες δυνατό-
τητες. Αλλά (για μένα) απλώς δεν είναι αναγκαία. Καθώς κάθομαι μόνος με την κιθάρα μου, η έλλειψη γνώσεων δε με εμποδίζει να παίζω το ένα ακόρντο μετά το άλλο και να βρίσκω τι μου φαίνεται ευχάριστο στο αυτί.

Μόλις βρω μια ακολουθία από ακόρντα που μ' αρέσουν, μπορώ τότε να διαλέξω το διάστημα που θα τα παίζω, το ένα μετά το άλλο, κι έτσι αρχίζω να ερευνώ το ρυθμό. Έχω κι εγώ εδώ το δικό μου «μικρόκοσμο», που ο Papert μίλησε πολύ γι' αυτό το θέμα τελευταία⁽²⁾. Μπορώ να παίζω, να διαμορφώνω και να εξασκώ τεχνι-

(2) (Σ.Τ.Μ.) Seymour Papert: Ερευνητής στη Γνωστική (Cognitive) Ψυχολογία. Η έννοια του «μικρόκο-
σμου» (microworld) ορίζεται εκεί σαν γνωστική δομή που αντανάκλα, σε μικρή κλίμακα, τις διαδικασίες του ευρύτερου χώρου όπου ζούμε.

κές, να εξερευνώ και να δοκιμάζω ιδέες, να θέτω συνεχώς ζητήματα, να δίνω ολόκληρος, φυσικά, διανοητικά και συγκινησιακά. Το νέο χτίζεται πάνω στο παλιό, το παλιό κανονίζεται σύμφωνα με τις απαιτήσεις του νέου. Γι' αυτούς τους λόγους λέω πως είμαι κιθαρίστας, γιατί μπορώ να ερευνώ, να προκαλώ τον εαυτό μου και να ανακαλύπτω πράγματα γι' αυτόν μέσα από την κιθάρα. Αυτό που με κάνει κιθαρίστα δεν είναι οι τεχνικές μου ικανότητες στην κιθάρα αλλά το γεγονός ότι έχω συνείδηση της δυναμικής — και παρούσας — κατάστασης που με διακατέχει και που έχω δεθεί μαζί της. Αν έχει κανείς συνείδηση αυτού του γεγονότος αλλά δε θέλει να τον κρατάει άλλο δεσμευμένο, αυτό σημαίνει ότι ήταν κάποτε κιθαρίστας. Αν πάλι δεν έχει πλήρη συνείδηση του γεγονότος, αυτό σημαίνει ότι θα μπορούσε να είναι κιθαρίστας, αν το ήθελε.

Είμαι λοιπόν δάσκαλος, είμαι και κιθαρίστας. Είμαι άραγε και γεωμέτρης; Η γεωμετρία ήταν, λιγάκι, ένα μυστήριο για μένα για αρκετό καιρό. Στο γυμνάσιο, η λέξη «γεωμετρία» σχεδόν πάντα ακολουθούνταν από τη λέξη «μετασχηματισμός»⁽³⁾. Η γεωμετρία φαινόταν καθαρά ότι σχετίζεται με τα σχήματα, στην πραγματικότητα μου φαινόταν ότι είναι αυτό που έκανα με τα σχήματα, δηλ. οι μετασχηματισμοί. Έτσι για μένα «γεωμετρία» σήμαινε μεταφορές, συμμετρίες, στροφές και άλλοι μετασχηματισμοί, που συνεχώς χρειαζόνταν να γράφεις μήτρες και διανύσματα. Αλλά δεν μπορούσα να συνδέσω αυτό το είδος γεωμετρίας μ' εκείνο που ο (μεγαλύτερος) αδελφός μου είχε μάθει σ' ένα άλλο σχολείο. Το δικό του είδος γεωμετρίας δε φαινόταν να ανακατεύει τίποτα μετασχηματισμούς: το αποτελούσαν οι κύκλοι, οι ελλείψεις, οι άλλες γραμμές, οι χορδές, οι εφαπτόμενες και η άλγεβρα γύρω απ' αυτά, που εκείνο τον καιρό με φόβιζε. Αντί να προσπαθώ να λύσω αυτή την αντίφαση και να ψάχνω για τα κοινά σημεία, παρατηρούσα μόνο τις διαφορές και συμπεραίνα ότι η δική μου γνώση ήταν για μετασχηματισμούς, ενώ η γνώση του αδελφού μου ήταν για την (καθαυτό) γεωμετρία. Ήμουν σίγουρος ότι δεν ήμουν γεωμέτρης, και απόφευγα καθετί που έμοιαζε με γεωμετρία.

Το 1978 πήγα στο Πανεπιστήμιο του Exeter να κάνω έρευνα με την επίβλεψη του Denis Crowfoot. Καθώς εργαζόμουν σε μερικά προβλήματα, βρήκα ότι θα ήταν χρήσιμο να απεικονίσω διάφορες καταστάσεις που σκεφτόμουν. Η ατμόσφαιρα ήταν τέτοια, που ενθαρρύνθηκα να μιλήσω για το τι είδους εικόνες είχα χρησιμοποιήσει. Ήταν η πρώτη φορά που θυμάμαι να έχω «εντυφίσει» σε τέτοια πράγματα. Ανακάλυψα ότι κατά ένα μεγάλο μέρος μπορούσα να ελέγχω αυτές τις εικόνες και να τις μεταβάλλω κατά βούληση. Καθώς μεταβάλλονταν μπορούσα να τις παρακολουθώ, σαν να ήμουν ανεξάρτητος παρατηρητής, και να κάνω κι άλλες παρατηρήσεις, προσέχοντας πράγματα που δεν είχα ποτέ πριν συνειδητοποιήσει. Η δυναμικότητα αυτών των γεγονότων ήταν τρομαχτική. Πέρασα ώρες και ώρες παίζοντας με εικόνες μέσα στο κεφάλι μου, μετακινώντας αυτό, αλλάζοντας εκείνο,

(3) (Σ.Τ.Μ.) Είναι φανερό ότι ο συγγραφέας του άρθρου αυτού διδάχτηκε τη γεωμετρία κάτω από το πνέμα της μεταρρύθμισης της δεκαετίας 1960-70, που στην Αγγλία εκφραζόταν από το πρόγραμμα School Mathematics Project.

διατηρώντας τούτα-δω όπως ήταν, μεταβάλλοντας κάποια άλλα. Άρχισα να ανακαλύπτω όλο και περισσότερα, όχι μόνο καινούργια πράγματα αλλά και (να εξηγώ) γνωστές ιδιότητες, που προηγούμενα τις δεχόμουν σαν αναμφισβήτητα δεδομένα. Η ομορφιά βρισκόταν ακόμη στην απλότητα. Η γνώση μου τώρα στηριζόταν σ' αυτό που μπορούσα να δω⁽⁴⁾, κι όχι σε μια σελίδα άλγεβρα που γέμιζα με την ελπίδα πως δεν περιείχε κανένα λάθος. Ήταν εκεί, μπροστά στα μάτια μου, χωρίς να χρειάζεται να πάρω χαρτί και μολύβι. Τότε ξαφνικά κατάλαβα τι ακριβώς έκανα εκείνη την εποχή: Ήταν ο κρίκος που έλειπε ανάμεσα στους μετασχηματισμούς που είχα μάθει σχολείο και στους κύκλους και τις ελλείψεις του αδελφού μου. Αυτό ήταν γεωμετρία. Ό,τι έλειπε προηγούμενα για μένα ήταν η κίνηση. Σίγουρα, ένας μετασχηματισμός στροφής είναι κίνηση, αλλά προηγούμενα (πριν απ' την τελευταία εμπειρία μου) απλώς άρχιζε από 'δω και τελείωνε εκεί, δεν τον είχα ποτέ παρατηρήσει στα ενδιάμεσα στάδια⁽⁵⁾. Τα γεωμετρικά σχέδια του αδελφού μου μετατρέπονταν προηγούμενα αμέσως σε αλγεβρικές σχέσεις — τώρα μπορούσα να μείνω με την εικόνα στο μυαλό και να ερευνήσω: στρίψε αυτή τη γραμμή μέχρι εκεί, σπρώξε αυτή τη γωνία εκεί πέρα... Συχνά μια ενορατική αντίληψη που έπαιρνα έτσι μπορούσε να οδηγήσει κατευθείαν στη λύση. Συχνά η ενόραση αυτή αποδεικνυόταν πολύ πιο χρήσιμη στο μέλλον απ' ό,τι στη λύση του συγκεκριμένου προβλήματος.

Είμαι γεωμέτρης για τον ίδιο λόγο που είμαι και κιθαρίστας. Χρησιμοποιώντας τις νοητικές εικόνες του μυαλού μου μπορώ να εξερευνήσω, να δοκιμάσω και να προκαλέσω τον εαυτό μου στον κόσμο της γεωμετρίας. Είναι κι αυτό ένα άλλο «όχημα», που με τη βοήθειά του μπορώ να ανακαλύψω περισσότερα πράγματα για τον εαυτό μου.

Για να μπορέσω να πω ότι τώρα είμαι γεωμέτρης, δεν χρησιμοποίησα τίποτα διαφορετικό απ' όσα είχα και πριν. Είχα πάντα όσα στοιχεία χρειάζονται για να γίνει κανείς γεωμέτρης. Η μόνη διαφορά είναι ότι προηγούμενα δεν το είχα συνειδητοποιήσει και δεν είχα χρησιμοποιήσει αυτά τα στοιχεία. (Αν το είχα κάνει) θα μπορούσα να έχω γίνει γεωμέτρης στα τέσσερά μου χρόνια το ίδιο όπως και στα είκοσι τέσσερα. Αλλά αν αυτό είν' ένα παράδειγμα της δυναμικότητας που έμενε κρυμμένη μέσα μου για τόσον καιρό χωρίς να συνειδητοποιείται και να χρησιμοποιείται, τότε τι άλλο κρύβεται εκεί μέσα που πρέπει ακόμα να συλλάβω και να κάνω συνειδητό;

(4) (Σ.Τ.Μ.) Είναι γνωστή η διαφορά μεταξύ του «βλέπω» κάτι (με προσοχή) και του «κοιτάζω» (απλά). Μπορεί κανείς να κοιτάζει χωρίς να βλέπει τίποτα, όπως μπορεί και να βλέπει κάτι χωρίς να χρειάζεται καν να κοιτάξει...

(5) (Σ.Τ.Μ.) Αυτό μπορεί να θεωρηθεί και σαν μια απάντηση στο άρθρο του Ian Stewart «Κίνηση χωρίς μετακίνηση», που είχε δημοσιευτεί παλιότερα στον ΕΥΚΛΕΙΔΗ Β'.

Η επιστροφή... του θεωρήματος JORDAN

από τους
MILOS DOSTAL και
RALPH TINDELL

New Jersey

Απόδοση: Σ. Κώτσιος - Π. Μωράτης

Το άρθρο δημοσιεύτηκε στο περιοδικό *Jahresbericht d. Deutschen Mathem.-Vereinigung* 80 (1978), και μεταφράστηκε κατόπιν αδείας του εκδοτικού οίκου, από τους Σ. Κώτσιο και Π. Μωράτη, οι οποίοι επιμελήθηκαν και το συμπλήρωμα στο τέλος του άρθρου.

Εισαγωγικά σχόλια. Μεταξύ των διαφόρων θεωρημάτων τα οποία εύκολα διατυπώνονται αλλά δύσκολα αποδεικνύονται, το θεώρημα της καμπύλης Jordan (που για συντομία θα αναφέρεται ΘΚJ) αναμφίβολα κατέχει μια ξεχωριστή θέση. Πραγματικά, δύσκολα υπάρχει άλλο θεώρημα το οποίο να φαίνεται τόσο «προφανές» όσο ένα οποιοδήποτε αξίωμα της στοιχειώδους γεωμετρίας, και του οποίου η απόδειξη δεν είναι καθόλου προφανής. Αυτό πιθανώς εξηγεί γιατί το θεώρημα της καμπύλης Jordan παρέμεινε απαρατήρητο μέχρι το 1887, οπότε ο Camille Jordan το απέδειξε και το σχολίασε στο έργο του "Cours d'Analyse" [16]⁽¹⁾. Δεν χρειάζεται να ειπωθεί ότι η απόδειξη του Jordan που δεν ήταν απόδειξη με τη σύγχρονη έννοια, ακόμα προσελκύει το ενδιαφέρον πολλών μαθηματικών οι οποίοι αναγνώρισαν τη σημασία του θεωρήματος για την κλασική και μιγαδική ανάλυση ⁽²⁾. Η πρώτη αυστηρή απόδειξη του ΘΚJ που δόθηκε από τον Oswald Veblen στα 1905 [32], αποκάλυψε την πολυπλοκότητα του όλου ζητήματος. Στα επόμενα 20 χρόνια το θεώρημα αποδείχτηκε ξανά, συμπληρώθηκε και γενινεύθηκε από διάφορους διακεκριμένους τοπολόγους (για να αναφέρουμε μερικούς Alexander [1], Antoine [3], Brouwer [7], [8], [9], Kerékjártó [17], [18], Schoenflies [27], [28], [29]). Έτσι, ενώ η τοπολογική φύση και η σημασία του ΘΚJ για την τοπολογία του επιπέδου είχε ξεκάθαρα αναγνωριστεί από την εποχή που ο Kerékjártó δημοσίευσε την κλασική του μονογραφία [18], το θεώρημα παρέμενε για τους ειδικούς της Ανάλυσης, ένα περίπλοκο θέμα. Για να καταλάβουμε το γιατί, αναφέρουμε μόνο ότι ο καθηγητής Salomon Bochner έγραψε πρόσφατα για το έργο του Καραθεοδωρή ([6], σελ. 831):

«...Στην πραγματικότητα ο Καραθεοδωρής σχεδίαζε ένα βιβλίο πάνω στη Μιγαδική Ανάλυση πριν από το βιβλίο για το Λογισμό των Μεταβολών. Αυτό που καθυστέρουσε το βιβλίο πάνω στις μιγαδικές μεταβλητές, ήταν μια διαδεδομένη αντίληψη μεταξύ των ειδικών της δεκαετίας του 1920, ότι, κάθε βιβλίο πάνω στις μιγαδικές μεταβλητές για να είναι πλήρες και για να αξίζει το όνομά του έπρεπε να περιέχει μια πλήρη και αυστηρή απόδειξη, χωρίς προαπαιτούμενα, του θεωρήματος του C. Jordan...

...Οι ειδικοί στην Ανάλυση της δεκαετίας του 1920 ήξεραν πολύ καλά ότι αυτό ήταν ένα «τοπολογικό» θεώρημα... Για όλα αυτά, οι ειδικοί στην Μιγαδική Ανάλυση εκείνης της εποχής, ανταγωνίζονταν στην έρευνα για την κατασκευή μιας απόδειξης του θεωρήματος Jordan που θα έδινε ένα τέλος σε όλες αυτές τις αποδείξεις, ο δε Καραθεοδωρής πειραματιζόταν για πολλά χρόνια με μια δική του απόδειξη...».

Πράγματι, μερικοί εξαιρετικοί αναλυτές εκείνης της εποχής επινόησαν νέες αποδείξεις του ΘΚJ (Bieberbach [5], Denjoy [12], Hartogs [15], Pringsheim [24], [25], Schmidt [26]). Πάντως, παρόλες τις ουσιαστικές απλοποιήσεις που πέτυχαν αυτοί, καθώς και άλλοι συγγραφείς, το θεώρημα παρέμεινε και πολύ πιθανώς θα παραμείνει δύσκολο να αποδειχθεί με εντελώς στοιχειώδεις προϋποθέσεις. Σαν αποτέλεσμα αυτής της κατάστασης έχει γίνει παράδοση να παραλείπεται η απόδειξη του ΘΚJ από τα εγχειρίδια Μιγαδικής Ανάλυσης (μεταξύ των λίγων εξαιρέσεων είναι τα βιβλία των Dienes [11] και Thron [30]). Ακόμη μια άμεση απόδειξη αυτού του θεωρήματος σπάνια εμφανίζεται ακόμα και σε εισαγωγικά βιβλία Τοπολογίας. Από την άλλη μεριά, παρόλη την αφθονία στοιχειωδών αποδείξεων του ΘΚJ στη βιβλιογραφία, (δες την βιβλιογραφία που σημειώνεται με * στο τέλος του άρθρου) λίγες απ' αυτές είναι πραγματικά πλήρεις και με αληθινά στοιχειώδη μορφή⁽³⁾.

Σ' αυτό το άρθρο παρουσιάζουμε μια στοιχειώδη απόδειξη του ΘΚJ που βασίζεται σε διαισθητικές γεωμετρικές έννοιες. Προκειμένου να δώσουμε μια φορμαλιστική απόδειξη και να αποφύγουμε τη χρήση γεωμετρικών σχημάτων στην επιχειρηματολογία, πρέπει να εισάγουμε μερικούς βοηθητικούς ορισμούς, καθώς και τους σχετικούς συμβολισμούς. Αυτό γίνεται στην παράγραφο 1, όπου κάποιος μπορεί να βρει εκείνα τα στοιχειώδη θέματα από την τοπολογία που χρησιμοποιούνται αργότερα στην απόδειξη⁽⁴⁾.

Πιστεύουμε ότι το κύριο πλεονέκτημα της απόδειξης του ΘΚJ όπως παρουσιάζεται στην παράγραφο 2 είναι ότι, σαν ένα ενδιαμέσο αποτέλεσμα επιτυγχάνεται μια πολύ απλή απόδειξη μιας ειδικής περίπτωσης του ΘΚJ, η οποία είναι αρκετή για τις ανάγκες της Μιγαδικής Ανάλυσης. Συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι το ΘΚJ ισχύει για την κλάση των **τυπικών καμπύλων** (δες τον ορισμό παρακάτω), η οποία μεταξύ άλλων περιλαμβάνει και όλες τις **κατά τμήματα ομαλές** (δηλ. κατά τμήματα λείες) καμπύλες Jordan.

Χωρίς να είμαστε αυστηροί, θα λέγαμε ότι, μια **τυπική καμπύλη** θα είναι μια οποιαδήποτε καμπύλη Jordan η οποία σ' όλα σχεδόν τα σημεία της «μοιάζει» με το γράφημα συνάρτησης μιας μεταβλητής. Ακριβέστερα, ας θεωρήσουμε μια συνεχή απεικόνιση $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία είναι είτε μια καμπύλη, είτε ένα τόξο Jordan.

Έστω $\bar{t} \in (0, 1]$ σταθερό, και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν αριθμοί t_1, t_2 με

$$0 < t_1 < \bar{t} \leq t_2 \leq 1,$$

ένα σύστημα συντεταγμένων (x, y) στο \mathbb{R}^2 , και μια συνάρτηση f έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα:

Εάν $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ η παραμετρική έκφραση της φ ως προς τις συντεταγμένες (x, y) , τότε η f ορίζεται στο διάστημα $\varphi_1([t_1, t_2])$ και $\varphi_2 = f \circ \varphi_1$.

Ακόμα, αφού η φ Jordan, η φ_1 πρέπει να είναι ένα προς ένα, το οποίο μαζί με το

θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής των συνεχών συναρτήσεων⁽⁴⁾— δείχνει ότι η φ_1 πρέπει να είναι γνήσια μονότονη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η φ_1 αύξουσα.

Θέτουμε $a = \varphi_1(t_1)$, $b = \varphi_1(t_2)$. Τότε η φ_1 είναι ένας ομοιομορφισμός του $[t_1, t_2]$ πάνω στο $[a, b]$.

Γράφοντας $x = \varphi_1(t)$, βλέπουμε ότι το σύνολο $\varphi[t_1, t_2]$ είναι το γράφημα (ως προς συντεταγμένες (x, y)) της συνάρτησης $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Αν $\bar{t} < t_2$ ($\bar{t} = t_2$ αντίστοιχα) θα λέμε ότι το $\varphi(\bar{t})$ είναι ένα τυπικό σημείο (αριστερά - τυπικό, αντίστοιχα) της φ ως προς την f , (x, y) t_1 και t_2 [f , (x, y) , και t_2 , αντίστοιχα].

Ορισμός: Έστω $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη Jordan έτσι ώστε κάθε σημείο $\varphi(t)$, $0 < t \leq 1$, είναι αριστερά - τυπικό (ως προς κάποια f , (x, y) και t_1 , όπου όλα εξαρτώνται από το t). Τότε η φ θα λέγεται τυπική.

Κάθε τυπική φ περιέχει τυπικά σημεία. Πράγματι, για ένα δεδομένο

$\bar{t} \in [0, 1]$, το $\varphi(\bar{t})$ είναι αριστερά - τυπικό ως προς κάποια f , (x, y) και t_1 .

Αλλά τότε κάθε $\varphi(t)$, $t_1 < t < \bar{t}$ είναι τυπικό ως προς τα ίδια f , (x, y) , t_1 και $t_2 = \bar{t}$.

Επομένως, το σύνολο των μη τυπικών σημείων μιας τυπικής καμπύλης φ είναι πουθενά πυκνό μέσα στο σύνολο $\varphi([0, 1])$.

Έστω $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια συνεχής απεικόνιση για την οποία υπάρχουν αριθμοί $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ τέτοιοι ώστε αν $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$

είναι η έκφραση της φ , ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων (x, y) , τότε σε κάθε διάστημα $[t_{i-1}, t_i]$ οι συναρτήσεις $\varphi_1(t)$ και $\varphi_2(t)$ είναι συνεχώς διαφορίσιμες και $[\varphi'_1(t)]^2 + [\varphi'_2(t)]^2 \neq 0$. Σ' αυτή την περίπτωση, η φ θα καλείται κατά τμήματα ομαλή. Με μια απλή εφαρμογή του θεωρήματος Αντίστροφης συνάρτησης δείχνεται ότι κάθε κατά τμήματα ομαλή καμπύλη ή τόξο Jordan, είναι τυπική.

Επομένως, δίνοντας μια απλή απόδειξη του ΘΚJ για τυπικές καμπύλες (βλέπε (2.1) - (2.6)) αποδεικνύεται το θεώρημα για όλες τις καμπύλες που χρησιμοποιούνται στην κλασική θεωρία συναρτήσεων. Αυτή η ειδική περίπτωση χρησιμοποιείται μετά για να αποδείξουμε το ΘΚJ στην πλήρη γενίκευσή του. (Βλέπε (2.7) - (2.11)).

1. Εισαγωγή

A. Γενικοί συμβολισμοί και ορολογία. Αν P και Q είναι σημεία του επιπέδου \mathbb{R}^2 , τότε $|P - Q|$ είναι η Ευκλείδεια απόστασή τους, \overline{PQ} είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα P και Q , και, για $P \neq Q$, $I(P, Q)$ είναι η ευθεία γραμμή που ορίζεται από τα P και Q .

Αν A και B υποσύνολα του \mathbb{R}^2 , τότε $\text{dist}(A, B)$ συμβολίζει την απόστασή τους, δηλαδή: $\text{dist}(A, B) = \inf \{|P - Q| : P \in A, Q \in B\}$ και \dot{A} , \bar{A} , ∂A και CA συμβολίζουν αντίστοιχα το εσωτερικό, την κλειστότητα, το σύνορο και το συμπλήρωμα του A ως προς \mathbb{R}^2 .

Λέμε ότι ένα υποσύνολο S του \mathbb{R}^2 δεν αποσυνδέεται το \mathbb{R}^2 , αν το συμπλήρωμα του CS είναι συνεκτικό. Γενικότερα, δεδομένων των σημείων $P, Q \in CS$, λέμε ότι το S δεν διαχωρίζει το P από το Q , αν τα P και Q βρίσκονται στην ίδια συνιστώσα του CS .

Αν A είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του CS , τότε το A περιέχεται σε μια μοναδική συνιστώσα του CS , την οποία θα συμβολίζουμε $K(A;S)$. Αν, παραδείγματος χάριν, το S είναι ένα φραγμένο υποσύνολο του \mathbb{R}^2 τότε το S περιέχεται σε κάποιο δίσκο Δ , και επομένως $C\Delta$ είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του CS .

Επομένως όλες οι συνιστώσες του CS , εκτός της $K(C\Delta;S)$ περιέχονται στον Δ , και άρα είναι φραγμένες. $K(C\Delta;S)$ είναι η μόνη μη φραγμένη συνιστώσα του CS και θα συμβολίζεται $Ext S$.

Καμπύλες, γραμμές και τόξα. Αν φ είναι μια απεικόνιση ενός υποσυνόλου A του \mathbb{R}^2 στο \mathbb{R}^2 , με $\langle \varphi \rangle$ θα συμβολίζεται το πεδίο τιμών της φ , δηλαδή $\langle \varphi \rangle = \varphi(A)$.

Μια καμπύλη φ , στο επίπεδο \mathbb{R}^2 , είναι μια συνεχής απεικόνιση του μοναδιαίου κύκλου S^1 στο \mathbb{R}^2 . Αν αυτή η απεικόνιση είναι ένα προς ένα, η φ θα λέγεται καμπύλη *Jordan*.

Ειδικότερα, λέγοντας καμπύλη θα εννοούμε πάντοτε μια κλειστή καμπύλη. Μια γραμμή λ , από ένα σημείο P σε ένα σημείο Q , είναι μια συνεχής απεικόνιση του μοναδιαίου διαστήματος $[0, 1]$ των πραγματικών αριθμών στο \mathbb{R}^2 , έτσι ώστε $\lambda(0) = P$ και $\lambda(1) = Q$.

Αν $P \neq Q$, τα σημεία P, Q θα λέγονται **άκρα** του λ (ή του $\langle \lambda \rangle$).

Θα γράφουμε $\lambda = \lambda[P, Q]$ για να δείξουμε ότι το λ είναι μια γραμμή με άκρα P, Q το δε σύνολο $\{P, Q\}$ θα συμβολίζεται λ .

Αν λ είναι μια γραμμή και I ένα διάστημα, $I \subset [0, 1]$, λI θα συμβολίζει το σύνολο $\{\lambda(t) : t \in I\}$.

Επομένως η σημασία των συμβολισμών $\lambda(a, b)$, $\lambda[a, b]$, κ.λ.π. είναι προφανής.

Επιπλέον θα γράφουμε $\tilde{\lambda}$ για το $\lambda(0, 1)$.

Δεδομένου ενός σταθερού καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων (x, y) στο \mathbb{R}^2 , η φυσική παραμετροποίηση $x(t) = \cos 2\pi t$, $y(t) = \sin 2\pi t$, $0 \leq t \leq 1$, του κύκλου S^1 , αντιστοιχεί σε κάθε καμπύλη φ μια μοναδική γραμμή $t \rightarrow \varphi(x(t), y(t))$. Αυτή η γραμμή, θα λέγεται η **κανονική παραμετροποίηση** της φ και θα συμβολίζεται με το ίδιο γράμμα.

Επομένως, συχνά θα μιλάμε για μια καμπύλη $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, και θα εννοούμε την κανονική παραμετροποίηση της φ .

Μια γραμμή $\lambda: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία είναι ένα προς ένα, θα λέγεται **τόξο**.

Επομένως, με τη λέξη «τόξο» θα εννοούμε αυτό που συνήθως λέγεται τόξο του

Jordan. Σ' αυτή την περίπτωση, $\tilde{\lambda} = \langle \lambda \rangle \setminus \lambda$.

Αν φ είναι είτε μια καμπύλη είτε ένα τόξο του *Jordan*, και λ ένα τόξο έτσι ώστε $\langle \lambda \rangle \subset \langle \varphi \rangle$, το λ θα λέγεται ένα **υποτόξο** της φ .

Αν φ είναι ένα τόξο και λ ένα υποτόξο του φ με άκρα P, Q θα γράφουμε $\lambda = \varphi[P, Q]$ για να δείξουμε ότι λ είναι «το τμήμα του $\langle \varphi \rangle$ από το P έως το Q ».

Αν φ είναι μια καμπύλη του *Jordan*, $P, Q \in \langle \varphi \rangle$, $P \neq Q$ και A ένα σημείο του $\langle \varphi \rangle$, διαφορετικό από τα σημεία P, Q (ή ακόμη A να είναι ένα υποτόξο του φ που δεν περιέχει τα P και Q) τότε το $\varphi[P, A, Q]$ θα συμβολίζει ένα ένα υποτόξο λ του φ έτσι

ώστε $\lambda = \lambda \{P, Q\}$, $A \in \lambda$ ($A \in \tilde{\lambda}$ αντίστοιχα).

Εάν λ, λ^* είναι δύο υποτόξα με αυτή την ιδιότητα, τότε είναι φανερό ότι

$$\langle \lambda \rangle = \langle \lambda^* \rangle.$$

Τέλος, δεδομένων τεσσάρων διαφορετικών σημείων A_1, A_2, B_1 και B_2 πάνω σε μια καμπύλη του Jordan φ , θα λέμε ότι τα ζεύγη A_1, A_2 και B_1, B_2 διασταυρώνονται επί της φ , αν ισχύει:

$$\langle \varphi \{A_1, B_1, A_2\} \rangle \cup \langle \varphi \{A_1, B_2, A_2\} \rangle = \langle \varphi \rangle.$$

Η διασταύρωση ζευγών είναι προφανώς μια τοπολογική ιδιότητα, δηλαδή παραμένει αναλλοίωτη στους ομοιομορφισμούς της $\langle \varphi \rangle$. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί η συμμετρικότητα της αναφερόμενης ιδιότητας.

C. Πολυγωνικές γραμμές: Μια γραμμή λέγεται πολυγωνική, αν υπάρχει ένας ομοιομορφισμός (δηλ. μια «αλλαγή παραμέτρων»)

$$\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ καθώς και } t_i, \text{ με } 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = 1$$

έτσι ώστε η $\alpha \circ \tilde{\alpha}$ να είναι γραμμική σε κάθε υποδιάστημα $[t_{j-1}, t_j]$, αλλά μη γραμμική σε οποιοδήποτε άλλο μεγαλύτερο υποδιάστημα του $[0, 1]$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι τα σημεία $A_j = \alpha(\tilde{\alpha}(t_j))$, που λέγονται κορυφές του α , δεν εξαρτώνται από την $\tilde{\alpha}$, και ότι

$$\langle \alpha \rangle = \langle \alpha \circ \tilde{\alpha} \rangle = \bigcup_{i=1}^k \overline{A_{i-1} A_i}.$$

Μια καμπύλη φ θα λέγεται πολυγωνική, αν η κανονική της παραμετροποίηση είναι μια πολυγωνική γραμμή.

Άμεση εφαρμογή της ομοιόμορφης συνέχειας, οδηγεί στο παρακάτω Λήμμα ([4] Satz 48, p. 72):

(1.1.) Λήμμα: Δεδομένης μίας γραμμής $\alpha = \alpha \{P, Q\}$ και ενός $\varepsilon > 0$, υπάρχει πολυγωνική γραμμή $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha} \{P, Q\}$, της οποίας οι κορυφές ανήκουν στο $\langle \alpha \rangle$, έτσι ώστε $|\alpha(t) - \tilde{\alpha}(t)| < \varepsilon$, για κάθε $t \in [0, 1]$.

Συγκεκριμένα, κάθε ένα από τα σύνολα $\langle \alpha \rangle, \langle \tilde{\alpha} \rangle$ βρίσκεται στην (κλειστή) ε -περιοχή του άλλου.

Το επόμενο λήμμα είναι ένα απλό πόρισμα από το λήμμα (1.1) σε συνδυασμό με μια προφανή αναγωγή μιας πολυγωνικής γραμμής σ' ένα πολυγωνικό υποτόξο⁽⁶⁾.

(1.2) Λήμμα: Ένα ανοικτό υποσύνολο $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε δυο διαφορετικά σημεία P, Q του U , υπάρχει ένα πολυγωνικό τόξο $\lambda = \lambda \{P, Q\}$ έτσι ώστε $\langle \lambda \rangle \subset U$.

D. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ JORDAN. Περίγραμμα της απόδειξης: Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το περίφημο:

(1.3) Θεώρημα της καμπύλης Jordan: Έστω φ μια καμπύλη του Jordan, τότε

(α) Η $\langle \varphi \rangle$ είναι το σύνορο κάθε συνιστώσας του $C \setminus \langle \varphi \rangle$.

(b) Το $C < \varphi >$ έχει ακριβώς δυο συνιστώσες, μια φραγμένη που συμβολίζεται $\text{Int} < \varphi >$, και την μη φραγμένη, που συμβολίζεται $\text{Ext} < \varphi >$.

Τα κύρια βήματα της απόδειξης του ΘΚJ που παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο, είναι:

(i) Το ΘΚJ αποδεικνύεται για τυπικές καμπύλες ((2.1)-(2.6)).

Μετά δείχνεται ότι:

(ii) Τα τόξα δεν αποσυνδέουν το επίπεδο (2.9).

Από την τελευταία πρόταση εύκολα παίρνει κανείς το (α) του (1.3). Πράγματι έχουμε το λήμμα:

(1.4) Λήμμα: Αν κανένα υποτόξο μιας καμπύλης του Jordan φ , δεν διαχωρίζει το \mathbb{R}^2 , τότε το $< \varphi >$ είναι το σύνορο κάθε συνιστώσας του $C < \varphi >$.

Απόδειξη: Έστω U μια συνιστώσα του $C < \varphi >$.

Αφού ένα συνοριακό σημείο του U δεν μπορεί να ανήκει ούτε στο U ούτε σε καμιά συνιστώσα του $C < \varphi >$, έχουμε ότι $\partial U \subset C < \varphi >$.

Αν το ∂U ήταν ένα γνήσιο υποσύνολο του $< \varphi >$, τότε το ∂U θα περιείχετο στο $< \lambda >$ για κάποιο υποτόξο λ του φ .

Επομένως $U \cap C < \lambda > = \bar{U} \cap C < \lambda >$, άρα το U θα ήταν κλειστό και ανοικτό στο $C < \lambda >$, συνεπώς το U θα ήταν μια συνιστώσα του $C < \lambda >$ (διότι $U \neq \emptyset$).

Επειδή $C < \lambda >$ είναι συνεκτικό από την υπόθεσή μας, και το U είναι μη κενό, θα συμπεράνουμε ότι $U = C < \lambda >$. Αυτό, οπωσδήποτε είναι αδύνατο διότι

$$< \varphi > \cap C < \lambda > \neq \emptyset \text{ και } < \varphi > \cap U = \emptyset. \text{ Άρα } \varphi = \partial U.$$

Το μέρος (α) του (1.3) χρησιμοποιείται τώρα για να δείξουμε ότι:

(iii) Το $< \varphi >$ αποσυνδέει το επίπεδο \mathbb{R}^2 , και τελικά, ότι

(iv) Υπάρχουν το πολύ δυο συνιστώσες του $C < \varphi >$ (δες και 2.11), το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη του ΘΚJ.

Χρησιμοποιούμε ακόμη το γεγονός ότι για συγκεκριμένες καμπύλες του Jordan τα μέρη (α) και (β) του (1.3) είναι προφανή. Προκύπτει λοιπόν το:

(1.5) Λήμμα: Έστω φ μια καμπύλη Jordan έτσι ώστε το $< \varphi >$ να είναι είτε κύκλος είτε σύνορο ενός τετραγώνου ή ακόμη και ενός τριγώνου. Τότε τα (α) και (β) του (1.3) ισχύουν για την φ .

Πράγματι, σε καθεμιά από τις τρεις αυτές περιπτώσεις μπορεί κάποιος να δώσει μια απλή απόδειξη: αλλά μπορεί επίσης να αποδειχθεί κατευθείαν από τους ορισμούς ότι το (1.3) ισχύει για κάθε αστεροειδή καμπύλη φ και κατόπιν το (1.5) προκύπτει αμέσως.

2. Απόδειξη του θεωρήματος Jordan

Δυο πολυγωνικές γραμμές α και β ,

$$\langle \alpha \rangle = \bigcup_{i=1}^k \overline{A_{i-1} A_i}, \quad \langle \beta \rangle = \bigcup_{j=1}^n \overline{B_{j-1} B_j},$$

θα λέγονται *διατεμνόμενες*, αν δεν υπάρχει κορυφή της μιας που ανήκει στην άλλη. Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε ζεύγος (i, j) ακεραίων, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$, το σύνολο $\overline{A_{i-1} A_i} \cap \overline{B_{j-1} B_j}$ είναι κενό ή μονομελές. Ο αριθμός των ζευγών (i, j) για τα οποία το αναφερόμενο σύνολο είναι μονομελές, λέγεται ο *αριθμός τομής των γραμμών* α και β , και συμβολίζεται $w(\alpha; \beta)$. Ο αριθμός $w(\alpha; \beta)$ εξαρτάται μόνο από τις $\langle \alpha \rangle$ και $\langle \beta \rangle$, αν δε η $\langle \alpha \rangle$ είναι ένα τμήμα \overline{AB} θα γράφουμε $w(\overline{AB}; \beta)$ αντί για $w(\alpha; \beta)$. Οι έννοιες «διατεμνόμενες» και «αριθμός τομής», μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση που το $\langle \beta \rangle$ αντικαθίσταται από μια ευθεία γραμμή. Και στις δυο περιπτώσεις έχουμε το ακόλουθο:

(2.1) Λήμμα: (i) $w(\alpha; \beta) = w(\beta; \alpha) = \sum_{i=1}^k w(\overline{A_{i-1} A_i}; \beta)$.

(ii) Αν $\langle \beta \rangle$ είναι μια ευθεία γραμμή ή ένα τρίγωνο

$$(\text{δηλ. } \langle \beta \rangle = \overline{B_0 B_1} \cup \overline{B_1 B_2} \cup \overline{B_2 B_0})$$

τότε $K(A_1; \langle \beta \rangle) = K(A_k; \langle \beta \rangle)$ αν και μόνο αν $w(\alpha; \beta)$ είναι ένας άρτιος αριθμός.

Απόδειξη: (i) αποδεικνύεται με επαγωγή στο k .

(ii) καταρχήν ισχυριζόμαστε ότι $\langle \beta \rangle$ είναι ένα μη εκφυλισμένο τρίγωνο δηλαδή B_0, B_1, B_2 μη συνευθειακά.

Έστω T η κυρτή θήκη (convex hull) των σημείων B_0, B_1, B_2 .

Έστω $k = 1$, δηλαδή $\langle \alpha \rangle = \overline{A_0 A_1}$, και έστω $\langle \alpha \rangle \cap \langle \beta \rangle \neq \emptyset$, δηλαδή $w(\alpha; \beta) > 0$.

Θέτουμε $I = I(A_0, A_1)$. Από το αξίωμα του Pasch⁽¹⁾ $I \cap \langle \beta \rangle = [C_1, C_2]$, και από την κυρτότητα του T , $\overline{C_1 C_2} \subset I \cap T$.

Θεωρώντας την αμοιβαία θέση των σημείων A_0, A_1, C_1, C_2 πάνω στη γραμμή I , η απόδειξη έπεται εύκολα. Για $\langle \beta \rangle$ εκφυλισμένο, δηλαδή B_0, B_1, B_2 συγγραμμικά, το λήμμα είναι προφανές, διότι από τον ορισμό του $w(\alpha; \beta)$, κάθε σημείο του $\langle \alpha \rangle \cap \langle \beta \rangle$ μετρίεται τώρα δυο φορές.

Τέλος, αν $\langle \beta \rangle$ είναι μια ευθεία γραμμή, το λήμμα είναι ένα άμεσο επακόλουθο μίας ισοδύναμης διατύπωσης του αξιώματος του Pasch⁽¹⁾.

(2.2) Λήμμα⁽⁷⁾. Έστω φ όπως στο (1.5) και X_1, Y_1 και X_2, Y_2 δυο διασταυρούμενα ζευγάρια σημείων της φ .

Έστω $\sigma_i = \sigma_i(X_i, Y_i)$, $i = 1, 2$ δεδομένες γραμμές έτσι ώστε

$$(\check{\sigma}_1 \cup \check{\sigma}_2) \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset \text{ και } K(\check{\sigma}_1; \langle \varphi \rangle) = K(\check{\sigma}_2; \langle \varphi \rangle).$$

Τότε οι γραμμές σ_1 και σ_2 τέμνονται, δηλ., $\langle \sigma_1 \rangle \cap \langle \sigma_2 \rangle \neq \emptyset$.

Απόδειξη: I. Έστω σ_1 και σ_2 πολυγωνικές.

Περίπτωση Ia: $K(\sigma_1; \langle \varphi \rangle) = K(\sigma_2; \langle \varphi \rangle) = \text{Int} \langle \varphi \rangle$ (δες (1.5)).

Προφανώς μπορούμε να ισχυριστούμε ότι σ_1 και σ_2 είναι διατεμνόμενα, αφού αλλιώς $\langle \sigma_1 \rangle \cap \langle \sigma_2 \rangle \neq \emptyset$, όπως επιθυμούμε.

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι

$$w(\sigma_1, \sigma_2) \text{ είναι ένας περιττός ακέραιος} \quad (*)$$

Έστω $\langle \sigma_1 \rangle = \bigcup_{j=1}^{m_1} \overline{A_{j-1}^1 A_j^1}$, $A_0^1 = X_1$, $A_{m_1}^1 = X_1$ ($i = 1, 2$).

Θα αποδείξουμε την (*) με επαγωγή πάνω στο m_1 .

Αν $m_1 = 1$, τότε από την κυρτότητα του τόπου $\overline{\text{Int} \langle \varphi \rangle}$

$$\text{έχουμε } \overline{\text{Int} \langle \varphi \rangle} \cap I(X_2, Y_1) = \overline{X_2 Y_2} \quad ('),$$

επομένως

$$\overline{A_{j-1}^1 A_j^1} \cap I(X_2, Y_2) = \overline{A_{j-1}^1 A_j^1} \cap \overline{X_2 Y_2}.$$

Εφαρμόζοντας το (2.1) στα $\alpha = \sigma_1$ και $\beta = I(X_2, Y_2)$ συμπεραίνουμε ότι $w(\sigma_1; \sigma_2)$ περιττός.

(Ότι $K(X_1; \beta) \neq K(Y_1; \beta)$ προκύπτει εύκολα από την ειδική εκλογή του φ , αλλά μπορεί επίσης να αποδειχθεί από την κυρτότητα του φ).

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι η (*) ισχύει για $m_1 \leq n-1$, $n > 1$ και για κάθε m_1 .

Θα αποδείξουμε ότι η (*) ισχύει για $m_1 = n$ και m_1 αυθαίρετο.

Σταθεροποιούμε ένα $Z \in \langle \varphi \{X_1, X_2, Y_1\} \rangle$ έτσι ώστε

$$A_j^1 \notin \langle \sigma_2 \rangle = \overline{Z A_1^2} \cup \overline{A_2^2 A_2^2} \cup \overline{A_2^2 Z}$$

για $j = 1, \dots, m_1$ και $|Z - X_2| > \min_j \delta_j$, όπου δ_j ορίζεται ως εξής:

$$\delta_j = \text{dist}(X_2, I(A_1^2, A_{j-1}^1) \cup I(A_{j-1}^1, A_j^1) \cup I(A_j^1, A_1^2))$$

αν τα τμήματα $\overline{A_{j-1}^1 A_j^1}$, $\overline{X_2 A_1^2}$ τέμνονται, και

$$\delta_j = \text{dist}(\overline{A_{j-1}^1 A_j^1}, \overline{X_2 A_1^2})$$

σε κάθε άλλη περίπτωση.

Από την εκλογή του Z ,

$$w(\sigma_1; \overline{Z A_1^2}) = w(\sigma_1; \overline{X_2 A_1^2}), \sigma_2 \text{ και } \sigma_2 \text{ διατέμνονται} \quad (I)$$

Έστω σ_2^i τέτοιο ώστε $\langle \sigma_2^i \rangle = \overline{Z A_1^2} \cup \bigcup_{j=1}^{m_2} \overline{A_{j-1}^2 A_j^2}$, $i = 1, 2$.

Οι γραμμές σ_1, σ_2^2 διατέμνονται (δες (1)), $w(\sigma_1; \sigma_2^2)$ είναι περιττός ακέραιος, από την επαγωγική υπόθεση. Αφού, από την (1),

$$w(\sigma_1; \sigma_2^1) = w(\sigma_1; \sigma_2),$$

είναι αρκετό να δείξουμε ότι οι ακέραιοι $w(\sigma_1; \sigma_2^2)$ και $w(\sigma_1; \sigma_2^1)$ είναι και οι δυο άρτιοι ή και οι δυο περιττοί. Από τα (2.1) (i) αυτό είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι οι ακέραιοι

$$w(\sigma_1; \overline{Z A^2_2}) \quad \text{και} \quad w(\sigma_1; \overline{Z A^2_1}) + w(\sigma_1; \overline{A^2_1 A^2_2})$$

είναι ταυτόχρονα άρτιοι ή περιττοί. Αλλά αυτό προκύπτει αμέσως, αφού από το (2.1) (i) το άθροισμά τους είναι ίσο με $w(\sigma_1; \sigma_2)$, το οποίο από τον (2.1) (ii) είναι ένας άρτιος αριθμός.

Περίπτωση Ib: $K(\check{\sigma}_1; \langle \varphi \rangle) = K(\check{\sigma}_2; \langle \varphi \rangle) = \text{Ext} \langle \varphi \rangle$. Διαλέγουμε ένα σημείο P και έναν δίσκο Δ , με κέντρο το P έτσι ώστε $\Delta \subset \text{Int} \langle \varphi \rangle$.

Αν T είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του φ , θέτουμε $T' = \overline{PT} \cap \partial\Delta$. (Η ύπαρξη της τομής T' προκύπτει εύκολα αν ορίσουμε το Δ δίσκο με κέντρο P και ακτίνα $\rho < \text{dist}(P, \langle \varphi \rangle)$. Τότε το $\langle \varphi \rangle$ βρίσκεται μέσα στο $C\Delta$). Η απεικόνιση $T \rightarrow T'$ είναι ένας ομοιομορφισμός του $\langle \varphi \rangle$ επί του $\partial\Delta$, τα ζεύγη X_1', Y_1' και X_2', Y_2' είναι διασταυρούμενα πάνω στο $\partial\Delta$.

Έστω σ^*_i μία γραμμή έτσι ώστε

$$\langle \sigma^*_i \rangle = \overline{X_1' X_2'} \cup \langle \sigma_i \rangle \cup \overline{Y_1' Y_2'}, \quad i = 1, 2.$$

Εφαρμόζοντας την απεικόνιση κατοπτρισμού τ ως προς τον κύκλο $\partial\Delta$ και μετά την περίπτωση Ia στις γραμμές $\tau \circ \sigma^*_1, \tau \circ \sigma^*_2$ παίρνουμε $\tau(\langle \sigma^*_1 \rangle) \cap \tau(\langle \sigma^*_2 \rangle) \neq \emptyset$, επομένως, επίσης $\emptyset \neq \langle \sigma^*_1 \rangle \cap \langle \sigma^*_2 \rangle = \langle \sigma_1 \rangle \cap \langle \sigma_2 \rangle$ το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.

II. σ_1, σ_2 τυχαία. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει ένα ζευγάρι από γραμμές σ_1, σ_2 που ικανοποιούν τις υποθέσεις του λήμματος αλλά για τις οποίες $\langle \sigma_1 \rangle \cap \langle \sigma_2 \rangle = \emptyset$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $\text{dist}(\langle \sigma_1 \rangle, \langle \sigma_2 \rangle) > \varepsilon$ (δες (*)). Από (1.1) είναι εύκολο να βρούμε πολυγωνικές γραμμές $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ οι οποίες ικανοποιούν τις υποθέσεις του λήμματος και βρίσκονται στις $\varepsilon/2$ -περιοχές των σ_1, σ_2 .

Επομένως $\langle \tilde{\sigma}_1 \rangle \cap \langle \tilde{\sigma}_2 \rangle = \emptyset$, αντίφασις.

(2.3) Λήμμα. Θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση

$$f: [a, b] \rightarrow (c, d). \text{ Αν } \gamma(t) = (t, f(t)), \quad a \leq t \leq b$$

είναι το γράφημα της f , τότε το σύνολο $W = ((a, b) \times (c, d)) \setminus \langle \gamma \rangle$ έχει ακριβώς δυο συνιστώσες.

Απόδειξη: Θέτουμε $G_i = \{(x, y) \in W : (-1)^i y > (-1)^i f(x)\} \quad (i = 0, 1)$.

Τότε κάθε G_i είναι ένα συνεκτικό σύνολο.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $f([a, b]) \subset (c + \varepsilon, d - \varepsilon)$.

Αν $P_j = (x_j, y_j)$ ($j = 1, 2$) είναι δυο διαφορετικά σημεία του G_0 , τότε υποθέτοντας $x_1 < x_2$ και θέτοντας $P'_j = (x_j, d - y_j)$, ($j = 1, 2$), θεωρούμε οποιαδήποτε γραμμή σ

$$\text{έτσι ώστε } \langle \sigma \rangle = \overline{P_1 P'_1} \cup \overline{P'_1 P'_2} \cup \overline{P'_2 P_2}.$$

Τότε $\sigma \equiv \sigma \{P_1, P_2\}$ και $\langle \sigma \rangle \subset G_0$.

Αν $x_1 = x_2$ είναι αρκετό να πάρουμε σ έτσι ώστε $\langle \sigma \rangle = \overline{P_1 P_2}$.

Ομοίως δείχνουμε ότι G_1 συνεκτικός. Αφού G_0, G_1 είναι ανοικτά ξένα σύνολα και $G_0 \cup G_1 = W$, είναι προφανώς και κλειστά στο W .

Άρα κάθε ένα είναι μια συνιστώσα του W .

(2.4) Λήμμα: Έστω $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη είτε ένα τόξο Jordan.

Έστω $\varphi(\bar{t})$ ένα τυπικό σημείο της φ ως προς κάποια $f, (x, y), t_1, t_2$.

Θέτουμε $(a, f(a)) = \varphi(t_1), (b, f(b)) = \varphi(t_2)$.

Τότε, για κάθε δίσκο Δ , με κέντρο $\varphi(\bar{t}) = (\bar{x}, \bar{y})$, υπάρχει ένα ορθογώνιο

$$R = [\bar{x} - \varepsilon_1, \bar{x} + \varepsilon_1] \times [\bar{y} - \varepsilon_2, \bar{y} + \varepsilon_2]$$

με την ακόλουθη ιδιότητα:

$$(S) \quad R \subset \Delta, [\bar{x} - \varepsilon_1, \bar{x} + \varepsilon_1] \subset (a, b)$$

υπάρχουν αριθμοί t_-, t_+ , με $0 < t_- < \bar{t} < t_+ < 1$, έτσι ώστε

$$\varphi(t_{\pm}) = (\bar{x} \pm \varepsilon_1, f(\bar{x} \pm \varepsilon_1)), f(\bar{x} \pm \varepsilon_1),$$

$$\text{αν } |\bar{x} - \bar{x}| \leq \varepsilon_1, \text{ τότε } |f(\bar{x}) - \bar{y}| < \varepsilon_2,$$

$$\langle \varphi \rangle \cap \partial R = \{\varphi(t_-), \varphi(t_+)\}, \langle \varphi \rangle \cap \hat{R} = \varphi(t_-, t_+)$$

Αν το σημείο $\varphi(\bar{t})$ είναι μόνο αριστερά - τυποποιημένο, τότε $\bar{t} = t_2, \bar{x} = b$, και η (S) αντικαθίσταται από την:

$$(S') \quad R \subset \Delta, \bar{x} - \varepsilon_1 > a,$$

υπάρχει $t_- \in (0, \bar{t})$ έτσι ώστε

$$\varphi(t_-) = (\bar{x} - \varepsilon_1, f(\bar{x} - \varepsilon_1)),$$

$$\varphi[0, \bar{t}] \cap R = \varphi[t_-, \bar{t}]$$

$$\varphi[0, \bar{t}] \cap \partial R = \{\varphi(t_-)\}.$$

Απόδειξη: Έστω $\varphi(\bar{t})$ ένα τυπικό σημείο.

Για κάθε $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ θέτουμε $\|X_0\| = \max\{|x_0|, |y_0|\}$.

Τότε υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ έτσι ώστε $\|X - \varphi(\bar{t})\| > \varepsilon_0$ για κάθε X στο συμπαγές σύνολο $\langle \varphi \rangle \setminus \varphi(t_1, t_2)$.

Έστω $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ τόσο μικρό ώστε

$$R_1 = [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon] \times [\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon] \subset \Delta, [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon] \subset (a, b)$$

Αν $I = (\bar{x} - \varepsilon', \bar{x} + \varepsilon')$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό διάστημα που περιέχει \bar{x} και για

το οποίο $I \subset [\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon]$ και $|f(x) - \bar{y}| < \varepsilon$ για όλα τα $x \in I$, θέτουμε

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{2}\right) \min(\varepsilon', \varepsilon''), \varepsilon_2 = \varepsilon.$$

Τότε το ορθογώνιο

$$R = [\bar{x} - \varepsilon_1, \bar{x} + \varepsilon_1] \times [\bar{y} - \varepsilon_2, \bar{y} + \varepsilon_2]$$

και οι αριθμοί t_{\pm} που ορίζονται από $\varphi(t_{\pm}) = (\bar{x} \pm \varepsilon_1, f(\bar{x} \pm \varepsilon_1))$ έχουνε όλες τις απαιτούμενες ιδιότητες. (Χρησιμοποιείται το γεγονός ότι $\varphi[t_1, t_2]$ είναι το γράφημα της f).

Η απόδειξη της (S') είναι ανάλογη αλλά απλούστερη.

(2.5) Πρόταση: Τα τυπικά τόξα δεν αποσυνδέουν το επίπεδο.

Απόδειξη: Έστω $\lambda: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ένα τυπικό τόξο.

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι δεδομένου ενός ζεύγους σημείων

$$P, Q \in C < \lambda >, \quad P \neq Q,$$

το λ δεν τα διαχωρίζει.

Ορίζουμε $U = \{t \in [0, 1] : \lambda[0, t] \text{ δεν διαχωρίζει τα } P, Q\}$.

Προφανώς $0 \in U$. Ακόμη το U είναι ένα μη κενό διάστημα το οποίο δεν εκφυλίζεται στο $\{0\}$, διότι το U είναι ανοικτό στο $[0, 1]$.

Πράγματι, αν $t \in U, \quad t < 1,$

τότε από τη συνέχεια του λ , για κάποιο $\varepsilon > 0, \quad t + \varepsilon \in U$

επομένως $[0, t + \varepsilon] \subset U,$

διότι U διάστημα. Επομένως, αν δείξουμε ότι

$$t_0 = \sup U \in U,$$

τότε κατά ανάγκη $t_0 = 1$, και η ιδιότητα αποδεικνύεται.

Εφαρμόζοντας το (2.4) (S') στα $\varphi = \lambda, \quad \bar{t} = t_0$ και σε κάθε Δ έτσι ώστε $P, Q \notin \Delta$, παίρνουμε το ορθογώνιο R και τον αριθμό $t_- < t$. Σταθεροποιούμε ένα τυχαίο $t' \in (t_-, t_0)$. Αφού U διάστημα, $t' \in U$, επομένως υπάρχει ένα τόξο

$$\alpha = \alpha[P, Q] \quad \text{έτσι ώστε} \quad < \alpha > \cap \lambda[0, t'] = \emptyset.$$

Έστω α_1, α_2 τα μέγιστα υποτόξα της μορφής $\alpha_1 = [P, P'], \alpha_2 = \alpha[Q', Q]$

για τα οποία $\alpha_i \cap R = \emptyset, i = 1, 2.$

(Εδώ υποθέτουμε ότι $< \alpha > \cap R \neq \emptyset$, αφού αλλιώς $< \alpha > \cap \lambda[0, t_0] = \emptyset$, πράγμα που επιθυμούμε). Επομένως $P', Q' \in \partial R$.

Έστω $\rho = \rho[P', Q']$ ένα τόξο τέτοιο ώστε $< \rho > \subset \partial R$ και $\lambda(t_-) \notin < \rho >$

Ας πάρουμε μια οποιαδήποτε γραμμή έτσι ώστε

$$\alpha_+ \rightarrow \alpha' [P, Q], \quad < \alpha' > = < \alpha_1 > \cup < \rho > \cup < \alpha_2 >.$$

Τότε από το (2.4) (S') βλέπουμε ότι:

$$< \alpha' > \cap \lambda[0, t_0] = < \alpha' > \cap \partial R \cap \lambda[0, t_0] \subset < \alpha' > \cap \{\lambda(t_-)\} = \emptyset$$

Επομένως, $t_0 \in U$.

(2.6) Πρόταση. Αν μια καμπύλη του Jordan φ , περιέχει τουλάχιστον ένα τυπικό σημείο, τότε το $\langle \varphi \rangle$ διαχωρίζει το επίπεδο \mathbb{R}^2 . Επιπλέον αν η φ είναι μια τυποποιημένη καμπύλη, τότε το θεώρημα καμπύλης του Jordan ισχύει για την φ .

Έστω $\rho = \rho\{P', Q'\}$ ένα οποιοδήποτε τόξο τέτοιο ώστε

$$\langle \rho \rangle \subset \partial R \rightarrow \partial R \quad \text{και} \quad \lambda(t_-) \notin \langle \rho \rangle.$$

Απόδειξη: Έστω $\varphi(\bar{t})$ ένα τυπικό σημείο της φ για κάποια συνάρτηση f , ένα σύστημα συντεταγμένων (x, y) στο \mathbb{R}^2 κ.λπ.

Έστω $\varphi(\bar{t}) = (\bar{x}, \bar{y})$.

Τότε υπάρχει ένα ορθογώνιο R και αριθμοί t_-, t_+ όπως στο (2.4) (S). (Για ένα σταθερό Δ).

$$\text{Θέτουμε } A_{\pm} = \varphi(t_{\pm}) \quad \text{και} \quad B_{\pm} = (\bar{x}, \bar{y} \pm \varepsilon_2).$$

Ισχυριζόμαστε ότι $K(B_-; \langle \varphi \rangle) \neq K(B_+; \langle \varphi \rangle)$.

Έστω ότι ισχύει το αντίθετο. Τότε για κάποια γραμμή $\alpha = \alpha\{B_-, B_+\}$,

$$\langle \alpha \rangle \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset.$$

Έστω Δ' ένας δίσκος με κέντρο στο $\varphi(\bar{t})$ έτσι ώστε

$$\Delta' \subset R, \quad \text{και} \quad \Delta' \cap \langle \alpha \rangle = \emptyset.$$

Εφαρμόζοντας το (2.4) (S) στο $\varphi(\bar{t})$ και Δ' , παίρνουμε το ορθογώνιο

$$R' = [\bar{x} - \varepsilon_1', \bar{x} + \varepsilon_1'] \times [\bar{y} - \varepsilon_2', \bar{y} + \varepsilon_2']$$

και τους αριθμούς t_-, t_+ .

Θέτουμε $A_{\pm}' = \varphi(t_{\pm}')$, $B_{\pm}' = (\bar{x}, \bar{y} \pm \varepsilon_2')$.

Έστω α' μια οποιαδήποτε γραμμή έτσι ώστε $\alpha' = \alpha'\{B_-, B_+\}$ και

$$\langle \alpha' \rangle = \langle \alpha \rangle \cup \overline{B_+ B_+'} \cup \overline{B_- B_-'},$$

και έστω φ' ένα τόξο έτσι ώστε $\langle \varphi' \rangle = \langle \varphi \rangle \setminus \varphi(t_-, t_+)$.

Αφού $R' \subset \Delta' \subset R$ και $\langle \alpha \rangle \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset$,

έχουμε $\langle \alpha' \rangle \cap \langle \varphi' \rangle = \emptyset$.

Έστω ψ καμπύλη του Jordan έτσι ώστε $\langle \psi \rangle = \partial R'$.

Από (2.4) (S), $(\alpha' \cup \varphi') \cap \langle \psi \rangle = \emptyset$ και τα σημεία A_-, A_+ βρίσκονται στις απέναντι «κατακόρυφες» πλευρές του $\langle \psi \rangle$. Αφού B_-, B_+ βρίσκονται στις απέναντι «οριζόντιες» πλευρές του $\langle \psi \rangle$, τα ζεύγη $\{A_-, A_+\}$ και $\{B_-, B_+\}$ είναι διασταυρούμενα στο ψ . Αυτό, μαζί με την προφανή σχέση,

$$\check{\alpha}' \cup \check{\psi}' \subset \text{Ext} \langle \psi \rangle,$$

συνεπάγεται από το (2.2) ότι $\langle \alpha' \rangle \cap \langle \psi' \rangle \neq \emptyset$ το οποίο είναι αδύνατο, επομένως προφανώς $\langle \alpha' \rangle \cap \langle \psi' \rangle = \langle \alpha \rangle \cap \langle \psi \rangle = \emptyset$.

Τώρα, έστω φ μια τυπική καμπύλη. Από τα (1.4) και (2.5) η φ ικανοποιεί το (α) του (1.3). Μόλις έχουμε δείξει ότι το $\langle \varphi \rangle$ διαχωρίζει το \mathbb{R}^2 . Έστω R το ορθογώνιο που αντιστοιχεί από το (2.4) (S) σε κάθε εκλεγμένο τυπικό σημείο της φ . Τότε το μέρος (α) του (1.3) συνδυασμένο με το (2.3) δείχνει ότι το $C \langle \varphi \rangle$ έχει το πολύ δυο συνιστώσες.

(2.7). Παρατήρηση: Αν φ είναι μια καμπύλη του Jordan, έστω $I(\varphi)$ η ένωση όλων των φραγμένων συνιστωσών του $C \langle \varphi \rangle$. Αφού $I(\varphi)$ και $\text{Ext} \langle \varphi \rangle$ είναι ξένα ανοικτά σύνολα, η ανάλυση $I(\varphi) \cup \langle \varphi \rangle \cup \text{Ext} \langle \varphi \rangle = \mathbb{R}^2$

συνεπάγεται $\partial I(\varphi) \subset \langle \varphi \rangle$,

επομένως $\overline{I(\varphi)} \setminus \langle \varphi \rangle = I(\varphi)$.

(Αν το (1.3) (α) ισχύει για την φ , τότε $\langle \varphi \rangle \subset \partial I(\varphi)$, δηλ. $\overline{I(\varphi)} = I(\varphi) \cup \langle \varphi \rangle$).

Με τους ίδιους όπως πιο πάνω συμβολισμούς έχουμε το ακόλουθο:

(2.8) Λήμμα. (i) Έστω φ (ψ , αντίστοιχα) μια καμπύλη Jordan η οποία ικανοποιεί το (α) (το (b) αντίστοιχα) του (1.3) και έστω $\langle \psi \rangle \subset \overline{I(\varphi)}$.

Τότε $\langle \psi \rangle \subset I(\varphi)$.

(ii) Έστω φ μια καμπύλη του Jordan και $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ τόξα, έτσι ώστε

$$\langle \alpha_i \rangle \cap \langle \varphi \rangle = \dot{\alpha}_i \text{ για όλα τα } i \text{ και } \dot{\alpha}_\kappa \cap \dot{\alpha}_\lambda = \emptyset \text{ για } \kappa \neq \lambda.$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι το θεώρημα της καμπύλης Jordan ισχύει για κάθε καμπύλη Jordan χ που ικανοποιεί

$$\langle \chi \rangle \subset \langle \varphi \rangle \cup \langle \alpha_1 \rangle \cup \dots \cup \langle \alpha_n \rangle.$$

Τότε, για κάθε τόξο β , τέτοιο ώστε $\langle \beta \rangle \subset \langle \varphi \rangle \setminus (\dot{\alpha}_1 \cup \dots \cup \dot{\alpha}_n)$,

υπάρχει μια καμπύλη Jordan ψ έτσι ώστε

$$\langle \beta \rangle \subset \langle \psi \rangle \subset \langle \varphi \rangle \cup \bigcup_{i=1}^n \langle \alpha_i \rangle$$

$$\text{και } \text{Int} \langle \psi \rangle \subset (\text{Int} \langle \varphi \rangle) \setminus \bigcup_{j=1}^n \langle \alpha_j \rangle$$

(Παρατηρήστε ότι σύμφωνα με την υπόθεση μας το ΘΚJ ισχύει για τις φ, ψ).

Απόδειξη. (i) Έστω Δ ένας δίσκος έτσι ώστε $\overline{I(\varphi)} \subset \Delta$.

Σταθεροποιούμε ένα $Z \in \partial \Delta$. Τότε $Z \in \text{Ext} \langle \varphi \rangle \cap \text{Ext} \langle \psi \rangle$.

(Δες την παράγραφο Α του μέρους Ι). Σημειώστε ότι από την (1.3) (α)

$$C I(\varphi) = \langle \varphi \rangle \cup \text{Ext} \langle \varphi \rangle = \overline{\text{Ext} \langle \varphi \rangle}.$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σημείο

$$X \in \text{Int} \langle \psi \rangle \cap C I(\varphi) = \text{Int} \langle \psi \rangle \cap \overline{\text{Ext} \langle \varphi \rangle}.$$

Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $X \in \text{Int} \langle \psi \rangle \cap \text{Ext} \langle \varphi \rangle$.

Από το (1.2) υπάρχει ένα τόξο $\lambda = \lambda \{ X, Z \}$ έτσι ώστε $\langle \varphi \rangle \cap \langle \lambda \rangle = \emptyset$.

Αφού $Z \in \text{Ext} \langle \psi \rangle$ και $X \in \text{Int} \langle \psi \rangle$, $\langle \psi \rangle \cap \langle \lambda \rangle \neq \emptyset$.

Επομένως, αν Y είναι ένα σημείο του $\langle \psi \rangle \cap \langle \lambda \rangle$, τότε από (2.7),

$$Y \in \overline{I(\varphi)} \setminus \langle \varphi \rangle = I(\varphi).$$

Άρα, $\text{Ext} \langle \varphi \rangle = K(Z; \langle \varphi \rangle) = K(\langle \lambda \rangle; \langle \varphi \rangle) =$
 $= K(Y; \langle \varphi \rangle) \subset I(\varphi),$

το οποίο είναι αδύνατο.

(ii) Από τις υποθέσεις μας προκύπτει ότι:

$\alpha_i \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset$ για όλα τα i , έτσι ώστε $\alpha_i \cap \langle \alpha_j \rangle = \emptyset$ για όλα τα $i \neq j$ (2)

Θα προχωρήσουμε με επαγωγή στο n . Έστω $n = 1$, $\alpha_1 = \alpha_1 \{ X, Y \}$.

Αν $\alpha_1 \subset \text{Ext} \langle \varphi \rangle$, θέτουμε $\psi = \varphi$. Αν $\alpha_1 \subset \text{Int} \varphi$, έστω ψ μια καμπύλη Jordan έτσι ώστε

$$\langle \psi \rangle = \langle \varphi \{ X, \beta, Y \} \rangle \cup \langle \alpha_1 \rangle$$

και χρησιμοποιούμε την (i). Υποθέτουμε ότι, το (ii) ισχύει όταν πλήθος των α_i είναι μικρότερο από το n ($n > 1$), θεωρούμε ότι μας δίνονται n τόξα α_i όπως στο Λήμμα. Εφαρμόζοντας την περίπτωση $n = 1$ στην ψ και στο α_n , παίρνουμε μια καμπύλη Jordan ψ' έτσι ώστε

$$\langle \beta \rangle \subset \langle \psi' \rangle \subset \langle \varphi \rangle \cup \langle \alpha_n \rangle$$

και $\text{Int} \langle \psi' \rangle \subset (\text{Int} \langle \varphi \rangle) \setminus \langle \alpha_n \rangle$.

Με επαναδιάταξη των $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ αν είναι αναγκαίο, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$\langle \alpha_i \rangle \cap \text{Int} \langle \psi' \rangle \neq \emptyset$ ακριβώς για όλα τα $i \leq k$, για κάποιο $k < n$

(αν $k = 0$, δεν υπάρχει τίποτα να αποδείξουμε, συνεπώς υποθέτουμε ότι $k \geq 1$).

Αφού $\langle \psi' \rangle \subset \langle \varphi \rangle \cup \langle \alpha_n \rangle$,

προκύπτει από την (2) ότι $\alpha_i \cap \langle \psi' \rangle = \emptyset$ για όλα τα $i \leq n - 1$.

Επομένως, για κάθε $i \leq k$, $\dot{a}_i \subset \text{Int} \langle \psi' \rangle$, και επίσης

$$\dot{a}_i \subset \overline{\text{Int} \langle \psi' \rangle} \cap \langle \varphi \rangle = (\langle \psi' \rangle \cup \text{Int} \langle \psi' \rangle) \cap \langle \varphi \rangle \subset \langle \psi' \rangle,$$

όπου $\langle a_i \rangle \cap \langle \psi' \rangle = \dot{a}_i$ για $1 \leq i \leq k$.

Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση στην ψ' και τα a_1, \dots, a_k , παίρνουμε μια καμπύλη ψ Jordan έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \langle \beta \rangle \subset \langle \psi \rangle \subset \langle \psi' \rangle \cup \langle a_1 \rangle \cup \dots \cup \langle a_k \rangle \\ \subset \langle \varphi \rangle \cup \langle a_1 \rangle \cup \dots \cup \langle a_n \rangle \end{aligned}$$

και $\text{Int} \langle \psi \rangle \subset (\text{Int} \langle \psi' \rangle) \setminus (\langle a_1 \rangle \cup \dots \cup \langle a_k \rangle) \subset (\text{Int} \langle \varphi \rangle) \setminus (\langle a_1 \rangle \cup \dots \cup \langle a_n \rangle)$.

όπου η τελευταία σχέση προκύπτει από τον ορισμό του αριθμού k .

(2.9) Πρόταση. Τα τόξα δεν αποσυνδέουν το επίπεδο.

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό της απόδειξης του (2.5). Όπως πριν, είναι αρκετό να δείξουμε ότι $t_0 = \sup U \in U$. Έστω Δ_1 ένας κλειστός δίσκος με κέντρο το $\lambda(t_0)$, τόσο μικρός ώστε τα σημεία $\lambda(0)$, P , Q να βρίσκονται έξω από το Δ_1 .

Θέτουμε $t_1 = \inf \{t: \lambda[t, t_0] \subset \dot{\Delta}_1\}$

$$\text{τότε } \lambda(t_1) \in \partial\Delta_1 \text{ και } \lambda(t_1, t_0] \subset \dot{\Delta}_1.$$

Έστω Δ_2 ένας ομόκεντρος δίσκος τόσο μικρός ώστε $\Delta_2 \cap \lambda[0, t_1] = \emptyset$.

Τότε, $\Delta_2 \subset \dot{\Delta}_1$,

και αν θέσουμε $t_2 = \inf \{t: \lambda[t, t_0] \subset \dot{\Delta}_2\}$, τότε $t_1 < t_2 < t_0$.

Αρα, $t_2 \in U$

(Πράγματι, το U είναι ένα διάστημα που περιέχει το $[0, t_0]$, και από το (1.1) υπάρχει ένα πολυγωνικό τόξο $\mu = \mu\{P, Q\}$ έτσι ώστε $\langle \mu \rangle \cap \lambda[0, t_2] = \emptyset$.

Αν $\langle \mu \rangle \cap \dot{\Delta}_2 = \emptyset$, τότε επίσης $\langle \mu \rangle \cap \lambda[0, t_0] = \emptyset$, άρα $t_0 \in U$.

Μπορούμε επομένως να ισχυριστούμε ότι $\langle \mu \rangle \cap \dot{\Delta}_2 \neq \emptyset$, το οποίο δίνει

$\langle \mu \rangle \cap \partial\Delta_1 \neq \emptyset$. (Εδώ εφαρμόζουμε το (1.5) στο $\partial\Delta_1$)

Αφού μ είναι ένα πολυγωνικό τόξο και $\partial\Delta_1$ ένας κύκλος, το σύνολο $\langle \mu \rangle \cap \partial\Delta_1$ είναι πεπερασμένο και επομένως ορίζει έναν διαμερισμό του μ σε υποτόξα μ_1, \dots, μ_m έτσι ώστε για κάθε $i = 1, \dots, m$

έχουμε: $\dot{\mu}_i \subset \{P, Q\} \cup (\langle \mu \rangle \cap \partial\Delta_1)$;

ή $\dot{\mu}_i \subset \Delta_1$ ή $\dot{\mu}_i \cap \Delta_1 = \emptyset$; και $\dot{\mu}_i \cap \dot{\mu}_j = \emptyset$, οποτεδήποτε $i \neq j$.

Υποθέτουμε ότι $\mu_i = \mu_i [P_i, Q_i]$ είναι τέτοιο ώστε $\check{\mu}_i \cap \check{\Delta}_2 \neq \emptyset$.

Επομένως $\check{\mu}_i \subset \check{\Delta}_1$ και $P_i, Q_i \in \partial \Delta_1$.

Θα ορίσουμε ένα νέο τόξο $\mu_i' = \mu_i' [P_i, Q_i]$ τέτοιο ώστε

$$\langle \mu_i' \rangle \cap \lambda [0, t_0] = \emptyset.$$

Επαναλαμβάνοντας αυτή την κατασκευή για κάθε δείκτη i , για τον οποίο

$$\check{\mu}_i \cap \check{\Delta}_2 \neq \emptyset,$$

και αντικαθιστώντας τα υποτόξα μ_i του μ με τα μ_i' παίρνουμε τελικά μια γραμμή $\mu' = \mu' [P, Q]$ τέτοια ώστε $\langle \mu' \rangle \cap \lambda [0, t_0] = \emptyset$, το οποίο δείχνει ότι $t_0 \in U$.

Κατασκευή του μ_i' : Έστω $\beta = \beta [P_i, Q_i]$ ένα τόξο τέτοιο ώστε

$$\langle \beta \rangle \subset \partial \Delta_1, \quad \lambda(t_1) \notin \langle \beta \rangle$$

και έστω φ μια καμπύλη Jordan για την οποία $\langle \varphi \rangle = \langle \beta \rangle \cup \langle \mu_i \rangle$.

Η τομή του κύκλου $\partial \Delta_2$ και της πολυγωνικής γραμμής $\langle \mu_i \rangle$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο. Επομένως, υπάρχουν τόξα $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\langle \alpha_j \rangle \subset \partial \Delta_2 \quad (\text{για όλα τα } j); \quad \check{\alpha}_1 \cup \dots \cup \check{\alpha}_n = \langle \mu_i \rangle \cap \partial \Delta_2 = \langle \varphi \rangle \cap \partial \Delta_2;$$

$$\text{και} \quad \check{\alpha}_i \cap \check{\alpha}_j = \emptyset, \quad \text{όταν} \quad i \neq j.$$

Από την (2.6) μπορούμε να εφαρμόσουμε την (2.8) (ii) ^(*) και να πάρουμε μια καμπύλη ψ , για την οποία ισχύει το ΘΚJ και τέτοια ώστε

$$\langle \beta \rangle \subset \langle \psi \rangle \subset \langle \varphi \rangle \cup \partial \Delta_2 \quad \text{και} \quad \text{Int} \langle \psi \rangle \subset (\text{Int} \langle \varphi \rangle) \setminus \partial \Delta_2.$$

Από (2.8) (i) βλέπουμε ότι $\text{Int} \langle \varphi \rangle \subset \check{\Delta}_1$ και αφού $\lambda(t_1) \notin \langle \varphi \rangle$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(t_1) \in \text{Ext} \langle \varphi \rangle$.

$$\text{Αυτό, μαζί με την} \quad \lambda(t_1, t_2) \cap \langle \varphi \rangle \subset \lambda(t_1, t_2) \cap \langle \mu \rangle = \emptyset,$$

$$\text{μας δίνει ότι} \quad \lambda[t_1, t_2] \subset \text{Ext} \langle \varphi \rangle \subset \text{Ext} \langle \psi \rangle,$$

$$\text{και επίσης} \quad \lambda[0, t_2] \cap \langle \psi \rangle = \emptyset.$$

$$\text{Αν δείξουμε ότι} \quad \lambda(t_2, t_0) \cap \langle \psi \rangle = \emptyset,$$

μπορούμε να πάρουμε ένα οποιοδήποτε μ_i' τέτοιο ώστε $\langle \mu_i' \rangle = \langle \psi \rangle \setminus \check{\beta}$.

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\check{\Delta}_2 \cap \langle \psi \rangle = \emptyset$.

$$\text{Αφού} \quad \text{Int} \langle \psi \rangle \subset (\text{Int} \langle \varphi \rangle) \setminus \partial \Delta_2,$$

το συνεκτικό σύνολο $\text{Int} \langle \psi \rangle$ είναι η ένωση των ξένων ανοικτών συνόλων

$$\text{Int} \langle \psi \rangle \cap \check{\Delta}_2 \quad \text{και} \quad \text{Int} \langle \psi \rangle \cap C \Delta_2,$$

επομένως ένα από αυτά τα σύνολα πρέπει να είναι κενό.

Αν είχαμε $\text{Int} \langle \psi \rangle \cap C \Delta_2 = \emptyset$,

τότε $\text{Int} \langle \psi \rangle \subset \overset{\circ}{\Delta}_2$

ειδικότερα $\langle \beta \rangle \subset \Delta_2$, το οποίο είναι αδύνατο. Επομένως,

$$(\text{Int} \langle \psi \rangle) \cap \overset{\circ}{\Delta}_2 = \emptyset,$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

(2.10) Πρόταση: Το θεώρημα της καμπύλης Jordan ισχύει για κάθε καμπύλη Jordan η οποία περιέχει τουλάχιστον ένα τυπικό σημείο.

Η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με την τελευταία παράγραφο της απόδειξης του (2.6) αν αντικαταστήσουμε το (2.5) με την (2.9).

(2.11) Απόδειξη του ΘΚJ για μια αυθαίρετη καμπύλη φ του Jordan.

Το (α) του (1.3) προκύπτει από το (1.4) και (2.9)

Μέρος (b): Πρώτον θα αποδείξουμε ότι το $\langle \varphi \rangle$ αποσυνδέει το \mathbb{R}^2 .

Έστω $F', G' \in \langle \varphi \rangle$, $F' \neq G'$. Αν $\overline{F'G'} \subset \langle \varphi \rangle$,

τότε ισχύει από την (2.6) (ή την (2.10)).

Επομένως μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει ένα σημείο $A \in \overline{F'G'} \setminus \langle \varphi \rangle$.

Έστω κ ένα τόξο έτσι ώστε $\langle \kappa \rangle = \overline{F'G'}$ είναι το μέγιστο τμήμα για το οποίο

$$A \in \langle \kappa \rangle \subset \overline{F'G'} \quad \text{και} \quad \overset{\circ}{\kappa} \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset.$$

Έστω φ_1, φ_2 υποτόξα του φ τέτοια ώστε

$$\overset{\circ}{\varphi}_1 = \overset{\circ}{\varphi}_2 = \{F, G\}, \quad \langle \varphi_1 \rangle \cup \langle \varphi_2 \rangle = \langle \varphi \rangle, \quad \overset{\circ}{\varphi}_1 \cap \overset{\circ}{\varphi}_2 = \emptyset.$$

Έστω Φ_i ($i = 0, 1$) καμπύλες Jordan τέτοιες ώστε

$$\langle \Phi_i \rangle = \langle \varphi_i \rangle \cup \langle \kappa \rangle.$$

Από (2.10) το ΘΚJ ισχύει για Φ_0, Φ_1 . Εκλέγουμε ένα δίσκο Δ με κέντρο ένα σημείο του $\overset{\circ}{\varphi}_1$ με $\Delta \cap \langle \Phi_2 \rangle = \emptyset$. Από το (α) του θεωρήματος μπορούμε να βρούμε σημεία

$$A', B' \in \Delta \setminus \langle \Phi_1 \rangle \quad \text{για τα οποία} \quad K(A'; \langle \Phi_1 \rangle) \neq K(B'; \langle \Phi_1 \rangle).$$

$$\text{Ισχυριζόμαστε ότι} \quad K(A'; \langle \varphi \rangle) \neq K(B'; \langle \varphi \rangle)$$

από το οποίο έπεται ότι το $\langle \varphi \rangle$ αποσυνδέει το \mathbb{R}^2 .

Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο. Τότε υπάρχει ένα τόξο $\gamma = \gamma[A', B']$ τέ-

τοιο ώστε $\langle \gamma \rangle \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset$. Έστω $\langle \alpha \rangle, \langle \beta \rangle$ τα μέγιστα υποτόξα του γ τέτοια ώστε

$$\check{\alpha} \cap \langle \kappa \rangle = \emptyset = \check{\beta} \cap \langle \kappa \rangle, \quad A' \in \langle \alpha \rangle, B' \in \langle \beta \rangle.$$

Από την εκλογή των A', B' έχουμε

$$\langle \gamma \rangle \cap \langle \kappa \rangle = \langle \gamma \rangle \cap \langle \Phi_1 \rangle \neq \emptyset.$$

Επομένως από τον ορισμό των $\alpha, \beta, \langle \alpha \rangle \cap \check{\kappa} \neq \emptyset \neq \langle \beta \rangle \cap \check{\kappa}$. Υποθέτουμε, χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι το σύστημα των συντεταγμένων εκλέγεται έτσι ώστε $\langle \kappa \rangle$ είναι ένα διάστημα του άξονα των x , και έχουμε

$$\langle \alpha \rangle \cap \check{\kappa} = A = (a, 0) \quad \text{και} \quad \langle \beta \rangle \cap \check{\kappa} = B = (b, 0).$$

Εναλλάσσοντας στην ανάγκη τα A', B' υποθέτουμε ότι $a \leq b$.

Θέτουμε $\varepsilon = (1/2) \text{dist}(\overline{AB}, \langle \varphi \rangle)$

και έστω R το ανοικτό ορθογώνιο $\{(x, y): a - \varepsilon < x < b + \varepsilon, |y| < \varepsilon\}$.

Από (2.3) το σύνολο $R \setminus \langle \kappa \rangle$ έχει δυο συνιστώσες R_+, R_- .

Αφού $R \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset$, παίρνουμε $R_{\pm} \cap \langle \Phi_i \rangle = \emptyset$ ($i = 1, 2$).

Επομένως από το (α) του θεωρήματος, εφαρμόζοντάς το σε οποιοδήποτε σημείο του $R \cap \check{\kappa}$, βλέπουμε ότι:

$$K(R_+; \langle \Phi_i \rangle) \neq K(R_-; \langle \Phi_i \rangle) \quad (i = 1, 2) \quad (3)$$

Αφού τα A', B' βρίσκονται σ' ένα συνεκτικό υποσύνολο Δ του $C \setminus \langle \Phi_2 \rangle$

και $(\check{\alpha} \cup \check{\beta}) \cap \langle \Phi_2 \rangle = \emptyset$,

συμπεραίνουμε ότι:

$$K(\check{\alpha}; \langle \Phi_2 \rangle) = K(A'; \langle \Phi_2 \rangle) = K(B'; \langle \Phi_2 \rangle) = K(\check{\beta}; \langle \Phi_2 \rangle) \quad (4)$$

Αφού R είναι μια περιοχή και του A και του B , έχουμε

$$\check{\alpha} \cap (R \setminus \langle \kappa \rangle) \neq \emptyset \neq \check{\beta} \cap (R \setminus \langle \kappa \rangle),$$

επομένως (i) $\check{\alpha} \cap R_+ \neq \emptyset$, ή (ii) $\check{\alpha} \cap R_- \neq \emptyset$.

Ισχυριζόμαστε ότι το (i) συνεπάγεται το $\check{\beta} \cap R_+ \neq \emptyset$, το οποίο από την (3) είναι προφανώς ισοδύναμο με $\check{\beta} \cap R_- = \emptyset$.

Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει, δηλαδή $\check{\beta} \cap R_- \neq \emptyset$. Τότε από την (4) και (i),

$$K(R_-; \langle \Phi_2 \rangle) = K(\check{\beta}; \langle \Phi_2 \rangle) = K(\check{\alpha}; \langle \Phi_2 \rangle) = K(R_+; \langle \Phi_2 \rangle)$$

το οποίο αντιτίθεται στο (3).

Επομένως $\check{\alpha} \cap R_+ \neq \emptyset$ συνεπάγεται $\check{\beta} \cap R_+ \neq \emptyset$,

επομένως το σύνολο $E = \{A', B'\} \cup \check{\alpha} \cup R_+ \cup \check{\beta}$

είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του $C \Phi_1$, δηλαδή

$$K(A'; <\Phi_1>) = K(E; <\Phi_1>) = K(B'; <\Phi_1>).$$

Αυτό, οπωσδήποτε, έρχεται σε αντίθεση με την εκλογή των A', B' . Ομοίως, οδηγείται κάποιος σε άτοπο για την περίπτωση (ii).

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, είναι αρκετό να δείξουμε ότι, για κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων A_0, A_1 , το σύνολο $I(\varphi)$ (\equiv η ένωση όλων των φραγμένων συνιστωσών του $C <\varphi>$) περιέχει ένα συνεκτικό υποσύνολο G , τέτοιο ώστε $A_0, A_1 \in G$. (Το υπόλοιπο της απόδειξης βασίζεται σε μια ιδέα από το [33]. Δες ακόμη το [1.4]). Δεδομένων δυο σημείων A_0, A_1 , έστω I_0, I_1 δυο παράλληλες ευθείες που περνάνε από τα A_0, A_1 αντίστοιχα. Έστω κ_i ($i = 0, 1$) ένα τόξο τέτοιο ώστε $<\kappa_i> = \overline{C_i C^i}$ είναι το μέγιστο τμήμα πάνω στην I_i για το οποίο $A_i \in \check{\kappa}_i \subset C <\varphi>$. Τότε

$$\check{\kappa}_0 \cup \check{\kappa}_1 \subset I(\varphi) \quad \text{και} \quad C_i, C^i \in <\varphi> \quad (i = 0, 1).$$

Έστω φ_1, φ^1 τόξα τέτοια ώστε $\varphi_1 = \varphi \setminus \{C_0, C_1, C^0\}$, $\varphi^1 = \varphi \setminus \{C_0, C^1, C^0\}$.

Πρώτον, ισχυριζόμαστε ότι τα ζεύγη $\{C_0, C^0\}, \{C_1, C^1\}$ είναι διασταρούμενα πάνω στην φ . Τότε (δες (5)) $\check{\varphi}_1 \cap \check{\varphi}^1 = \emptyset$. Επομένως μπορούμε να βρούμε μια καμπύλη Jordan ψ τέτοια ώστε

$$<\psi> = \overline{C_0 C^0} \cup \varphi^1 \setminus \{C^0, C^1\} \cup \overline{C^1 C_1} \cup \varphi_1 \setminus \{C_1, C_0\}.$$

Τότε $<\psi> \subset I(\varphi) \cup <\varphi>$.

Από την (2.7) το τελευταίο σύνολο είναι ίσο με $\overline{I(\varphi)}$, διότι από την αρχή της απόδειξης η φ ικανοποιεί το (α) του θεωρήματος και επομένως $<\varphi> \subset \overline{I(\varphi)}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν $<\psi> \subset \overline{I(\varphi)}$.

Εφαρμόζοντας το (2.10) στην ψ , και χρησιμοποιώντας την (2.8) (i),

έχουμε $\text{Int } <\psi> \subset C \setminus I(\varphi)$.

Θέτουμε $G = \{A_0, A_1\} \cup \text{Int } <\psi>$.

Τότε προφανώς $G \subset I(\varphi)$ και G συνεκτικό, διότι

$$\text{Int } <\psi> \subset G \subset \overline{\text{Int } <\psi>} \quad (4).$$

Αν τα ζεύγη $\{C_0, C^0\}, \{C_1, C^1\}$ δεν είναι διασταρούμενα στο φ ,

τότε $<\varphi_1> = <\varphi^1>$.

και εναλλάσσοντας στην ανάγκη τα C_1 και C^1 , μπορούμε να ισχυριστούμε ότι

$$\langle \varphi_1 \{C^2, C^1\} \rangle \cap \langle \varphi^1 \{C_1, C_0\} \rangle = \emptyset \quad (\text{δες (5)}).$$

Τότε η ψ μπορεί να οριστεί όπως ανωτέρω και το υπόλοιπο της απόδειξης είναι το ίδιο όπως και στην προηγούμενη περίπτωση. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ΘΚJ.

3. Παρατηρήσεις

(1). Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει μια παρόμοια ιστορία για το αξίωμα του Pasch (δες: [19, 21, 23]): (P). Δεδομένων τριών μη συγγραμικών σημείων B_0, B_1, B_2 , θεωρούμε το τρίγωνο $\beta = \overline{B_0 B_1} \cup \overline{B_1 B_2} \cup \overline{B_2 B_0}$ και μια οποιαδήποτε ευθεία γραμμή I στο επίπεδο του β , η οποία τέμνει την πλευρά $\overline{B_0 B_1}$ και δεν περνά ούτε από το B_0 ούτε από το B_1 . Τότε η I τέμνει είτε το $\overline{B_0 B_2}$ είτε το $\overline{B_1 B_2}$. Μια ισοδύναμη φόρμουλα για το (P) θα μπορούσε να ήταν: «Το θεώρημα του Jordan για ευθείες γραμμές».

Πράγματι: (J) Το συμπλήρωμα (στο επίπεδο) κάθε ευθείας γραμμής αποτελείται από δυο ξένα κυρτά σύνολα. (Για την απόδειξη του (P) \Leftrightarrow (J) δες [21]). Η σημασία αυτού του αξιώματος για τη θεμελίωση της Ευκλείδειου Γεωμετρίας αναγνωρίστηκε πλήρως μόλις το 1882 από τον πολύ γνωστό Γερμανό γεωμέτρη Moritz Pasch [23]. Πάντως, το αξίωμα μπορεί να αναζητηθεί πίσω στα έργα του Άραβα μαθηματικού Nasir - Eddin al Tusi (1201-1274) ο οποίος το χρησιμοποίησε στην «απόδειξη» του πέμπτου αξιώματος του Ευκλείδη πάνω στις παράλληλες. Η εργασία του παρέμεινε σε χειρόγραφο μέχρι το 1594 οπότε και δημοσιεύτηκε στη Ρώμη [22]. Αργότερα αυτή η εργασία σχολιάστηκε από τους J. Wallis, G. Saccheri και N.I. Lobačevskij, πάντοτε σε σχέση με το 5ο Αξίωμα του Ευκλείδη. (Σημειώνουμε εδώ ότι ο Lobačevskij χρησιμοποίησε τη μορφή (J) του αξιώματος (δες [19]). Χρησιμοποιούμε (P) και (J) για να αποδείξουμε το Λήμμα (2.1).

(2). Ο Jordan αναφέρει μόνο το μέρος του θεωρήματος το οποίο λέει ότι το γράφημα $\langle \varphi \rangle$ μιας απλής κλειστής επίπεδης καμπύλης φ αποσυνδέει το επίπεδο σε δυο τόπους, $\text{Ext} \langle \varphi \rangle$ και $\text{Int} \langle \varphi \rangle$. Επομένως παραλείπει το γεγονός ότι το $\langle \varphi \rangle$ είναι το κοινό σύνορο τόσο του $\text{Ext} \langle \varphi \rangle$ όσο και του $\text{Int} \langle \varphi \rangle$. Επιπλέον, ο Jordan υποθέτει ότι το θεώρημα ισχύει για τα πολύγωνα. Η απόδειξή του βασίζεται στην κατασκευή δυο ακολουθιών από απλές πολυγωνικές γραμμές φ_n, Φ_n ($n = 1, 2, \dots$) των οποίων η «απόσταση» από φ είναι θετική αλλά συγκλίνουν στο 0 για $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle &\subset (\text{Ext} \langle \varphi_n \rangle) \cap (\text{Int} \langle \Phi_n \rangle), \quad \langle \varphi_n \rangle \subset \text{Int} \langle \varphi_{n+1} \rangle, \\ \langle \Phi_n \rangle &\subset \text{Ext} \langle \Phi_{n+1} \rangle. \end{aligned}$$

Η απόδειξη του Jordan όπως και μια άλλη που έδωσε αργότερα ο de la Vallée

Poussin [31] αναλύθηκαν και συμπληρώθηκαν από τον Schoenflies [29]. Το πώς αισθανόντουσαν οι γεωμέτρες, στην αρχή του αιώνα, για το θεώρημα του Jordan μπορεί κανείς να το δει στην αρχή ενός paper του Veblen [32]: «Η δουλειά του Jordan για το θεμελιώδες θεώρημα του, ότι μια απλή κλειστή καμπύλη που βρίσκεται ολόκληρη στο επίπεδο το διαχωρίζει σε εσωτερικό και εξωτερικό τόπο, θεωρείται σαν το πιο σημαντικό βήμα προς την κατεύθυνση των τέλεια αυστηρών μαθηματικών. Η απόδειξή του πάντως δεν είναι ικανοποιητική για πολλούς μαθηματικούς...».

(3). Μερικοί συγγραφείς υποθέτουνε — συχνά χωρίς λεπτομερή αναφορά — την ισχύ του ΘΚJ και των πορισμάτων του για ειδικές κατηγορίες καμπύλων (π.χ. για πολυγωνικές καμπύλες). Άλλοι παραλείπουν την απόδειξη ορισμένων βημάτων τα οποία είναι «γεωμετρικώς προφανή». (Αλλά τι είναι πιο προφανές από το ίδιο το ΘΚJ). Τελικά, ελάχιστες αποδείξεις μπορούν να θεωρηθούν αυστηρές με τη μοντέρνα έννοια.

(4). Από την άλλη μεριά δεν αναφέρουμε στο μέρος I διάφορες στοιχειώδεις προτάσεις όπως: (i) δυο ξένα συμπαγή υποσύνολα (του \mathbb{R}^2) έχουν θετική απόσταση και επομένως ξένες περιοχές· (ii) το θεώρημα Ενδιαμέσου Τιμής για συνεχείς συναρτήσεις μια μεταβλητής, (iii) ορισμό και βασικές ιδιότητες των συνεκτικών συνόλων, των συνιστωσών ενός συνόλου (στο \mathbb{R}^2) κ.λπ. Όλα αυτά μπορούν να βρεθούν σ' ένα οποιοδήποτε εισαγωγικό βιβλίο γενικής τοπολογίας.

(Σ.τ.μ. Προκειμένου να διευκολυνθεί ο αναγνώστης, στο τέλος του άρθρου υπάρχει το συμπλήρωμα, όπου, θυμίζουμε ορισμούς καθώς και βασικές προτάσεις, από την τοπολογία του επιπέδου).

(5). Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας τον ομοιομορφισμό $\varphi^{-1} = \langle \varphi \rangle \rightarrow S^1$, βλέπουμε ότι όλες οι ερωτήσεις περί διασταυρούμενων ζευγών σημείων επί της φ μπορούν να αναχθούν σε αντίστοιχες ερωτήσεις για την κανονική παραμετροποίηση του κύκλου S^1 . Για παράδειγμα, είναι εύκολο ν' αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση: Έστω A_1, A_2, B_1 και B_2 τέσσερα διαφορετικά σημεία που ανήκουν στην $\langle \varphi \rangle$. Έστω ότι

$$\varphi_1 = \varphi [A_1, B_1, A_2] \text{ και } \varphi_2 = \varphi [A_1, B_2, A_2].$$

Τότε ή τα ζεύγη $\{A_1, A_2\}, \{B_1, B_2\}$ είναι διασταυρούμενα επί της φ (πράγμα που είναι ισοδύναμο με $\varphi_1 \cap \varphi_2 = \emptyset$), ή τα πιο πάνω ζεύγη δεν είναι διασταυρούμενα επί της φ οπότε $\langle \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_2 \rangle$ και εναλλάσσοντας τα A_2, B_2 (αν χρειαστεί) μπορούμε να επιτύχουμε την ακόλουθη διάταξη των σημείων πάνω στην φ : A_1, B_1, B_2, A_2 . Ειδικότερα ισχύει

$$\langle \varphi_1 [A_1, B_1] \rangle \cap \varphi_1 [B_2, A_2] = \emptyset.$$

(6). Με αυτό εννοούμε τα εξής: Έστω $\lambda = \lambda [P, Q]$ πολυγωνική γραμμή με $P \neq Q$.

Τότε υπάρχει πολυγωνικό τόξο $\mu = \mu\{P, Q\}$, έτσι ώστε $\langle \mu \rangle \subset \langle \lambda \rangle$.

(Σκιαγράφηση της απόδειξης: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $\lambda: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι κατά τμήματα γραμμικό. Το σύνολο

$$M_\lambda = \{\lambda(t): \lambda(t) = \lambda(t') \text{ για κάποια } t \neq t'\}$$

είναι μια πεπερασμένη κλάση αποτελούμενη από τμήματα και μεμονωμένα σημεία, και ο αριθμός m_λ των συνιστωσών του κλειστού συνόλου $N\lambda$, όπου

$$N\lambda = \lambda^{-1}(M_\lambda) \subset [0, 1]$$

είναι πεπερασμένος.

Έστω $t_0 = \min N\lambda$, $t_1 = \max \{t: \lambda(t) = \lambda(t_0)\}$.

Διαγράφοντας το καμπύλο τμήμα $\lambda(t_0, t_1)$ από το $\langle \lambda \rangle$, δηλ. «συνενώνοντας» τον περιορισμό του λ στο $[0, t_0]$ (ή στο $\{0\}$ εάν $t_0 = 0$) με τον περιορισμό του λ στο $[t_1, 1]$ παίρνουμε μια νέα απεικόνιση τέτοια ώστε αν m_1 είναι ο αριθμός των συνιστωσών του αντίστοιχου συνόλου $N\lambda_1$, τότε $m_1 < m_\lambda$. Μετά πεπερασμένο αριθμό βημάτων επιτυγχάνουμε ένα λ_k για το οποίο $m_k = 0$. Το ζητούμενο τόξο μ κατόπιν παραμετροποιείται επί του $[0, 1]$.

(7). Η απόδειξη αυτού του Λήμματος είναι από το [13] όπου το (2.2) αποδεικνύεται αν η $\langle \varphi \rangle$ είναι σύνορο ενός τετραγώνου και τα X_i, Y_i είναι εσωτερικά σημεία των απέναντι πλευρών της $\langle \varphi \rangle$. Η αναζήτηση μιας στοιχειώδους απόδειξης αυτής της πρότασης είχε τεθεί σαν πρόβλημα στο Čas. Pěst. Mat. (vol 81, 1956, p. 470) από τον Jan Mařík. Η περίπτωση τυχαίας πολυγωνικής καμπύλης Jordan, υπάρχει στην απόδειξη του θεωρήματος Jordan του Denjoy [12] είναι διαφορετικές από τη δική μας. Ο Denjoy υποθέτει την ισχύ του ΘΚJ για πολυγωνικές καμπύλες Jordan από τον οποίο παίρνει μια άμεση απόδειξη για τη δική του διατύπωση του Λήμματος 2.2. και κατόπιν χρησιμοποιεί το λήμμα για να αποδείξει απ' ευθείας το μέρος (b) του (1.3), με συνέπεια να παραλείψει το γεγονός ότι τα απλά τόξα δεν αποσυνδέουν το επίπεδο. Το Λήμμα (2.2) δεν ισχύει προφανώς σε επιφάνειες όπως π.χ. torus.

(8). Πράγματι, έστω $K = \overline{\text{Int } \langle \varphi \rangle}$, $ST = K \cap I(X_2, Y_2)$. Επειδή το K κυρτό, $X_2 Y_2 \subset K$. Επειδή $\overline{ST} \not\subset \langle \varphi \rangle$

$$(\text{γιατί από } \partial_2 \cap \langle \varphi \rangle = \emptyset \text{ έπεται } \overline{X_2 Y_2} = \langle \sigma_2 \rangle \not\subset \langle \varphi \rangle),$$

εξαιτίας της μορφής του K (για την ακρίβεια λόγω κυρτότητας του K)

$$\text{έπεται ότι } \overline{ST} \cap \langle \varphi \rangle = \overline{ST} \cap \partial K = \{S, T\},$$

$$\text{αλλά } X_2, Y_2 \in \overline{ST} \cap \langle \varphi \rangle,$$

$$\text{συνεπώς } \overline{X_2 Y_2} = \overline{ST}.$$

(9). Πράγματι, έστω χ μια καμπύλη Jordan τέτοια ώστε $\langle \chi \rangle \subset \langle \varphi \rangle \cup \partial \Delta_2$. Επειδή $\langle \varphi \rangle \cap \partial \Delta_2$ είναι πεπερασμένο σύνολο, υπάρχουν (ευθύγραμμα ή κυκλικά) τόξα γ_i , τέτοια ώστε

$$\gamma_i \cap \gamma_j = \emptyset \text{ για } i \neq j, \text{ και } \langle \varphi \rangle \cup \partial \Delta_2 = \bigcup_{i=1}^n \langle \gamma_i \rangle.$$

Συνεπώς, αν $\langle \chi \rangle \cap \langle \gamma_i \rangle \neq \emptyset$ για κάποια i , τότε $\langle \gamma_i \rangle \subset \langle \chi \rangle$.

Συμπεραίνουμε, ότι το $\langle \chi \rangle$ είναι ένωση μιας υποοικογένειας της

$$\{\langle \gamma_1 \rangle, \dots, \langle \gamma_n \rangle\}$$

έτσι που μετά από αλλαγή παραμέτρων (εάν χρειαστεί), το χ είναι μια κατά τμήματα λεία, άρα επίσης και τυπική καμπύλη. Από το (2.6) το ΘΚJ ισχύει για το χ .

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΩΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Ανοικτά - κλειστά σύνολα

Η συνήθης τοπολογική δομή του \mathbb{R}^2 , εισάγεται από την Ευκλείδεια απόσταση $|\cdot|$, έχει δε σαν βάση την κλάση όλων των ανοιχτών δίσκων του \mathbb{R}^2 . Αυτό σημαίνει ότι, ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^2 θα είναι ανοιχτό αν και μόνο εκφράζεται σαν ένωση μιας οικογένειας ανοιχτών δίσκων. Κλειστό θα λέγεται κάθε υποσύνολο του \mathbb{R}^2 που αποτελεί το συμπλήρωμα ενός ανοιχτού υποσυνόλου.

Έστω τώρα A , ένα μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Ορίζονται τα ακόλουθα υποσύνολα.

— Το εσωτερικό του A , που συμβολίζεται με $\overset{\circ}{A}$ και αποτελεί την ένωση όλων των ανοιχτών (στο \mathbb{R}^2) υποσυνόλων του A . Είναι το μέγιστο ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 που περιέχεται στο A .

— Το εξωτερικό του A , που συμβολίζεται με $\overset{\circ}{CA}$ και αποτελεί το εσωτερικό του συμπληρώματος του A .

— Η κλειστότητα του A , που συμβολίζεται με \bar{A} , και, αποτελεί την τομή όλων των κλειστών (στο \mathbb{R}^2) υπερσυνόλων του A . Είναι το ελάχιστο κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 που περιέχει το A .

— Το σύνορο του A , που συμβολίζεται με ∂A , και εκφράζεται με την διαφορά $\bar{A} \setminus \overset{\circ}{A}$. Το σύνορο του A και το σύνορο του CA συμπίπτουν δηλ. $\partial A = \partial(CA)$.

Άμεσες συνέπειες των πιο πάνω ορισμών είναι οι ιδιότητες:

— $p \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow$ υπάρχει ανοιχτός δίσκος $\Delta(p, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε $\Delta(p, \varepsilon) \subset A$

— $r \in \overset{\circ}{CA} \Leftrightarrow$ υπάρχει ανοιχτός δίσκος $\Delta(r, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, έτσι ώστε $\Delta(r, \varepsilon) \cap A = \emptyset$

— $p \in \bar{A} \Leftrightarrow$ για κάθε ανοιχτό δίσκο $\Delta(p, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, έπεται
 $\Delta(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

— $p \in \partial A \Leftrightarrow$ για κάθε ανοιχτό δίσκο $\Delta(p, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, έπεται
 $\Delta(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $\Delta(p, \varepsilon) \cap (A^c \neq \emptyset)$

• Ακόμη ισχύουν και οι ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

— A ανοιχτό $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset \Leftrightarrow \partial A \subset A^c$.

— A κλειστό $\Leftrightarrow A = \bar{A} \Leftrightarrow \partial A \subset A \Leftrightarrow \partial A \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset$.

— $\bar{A} = A \cup \partial A$. Το σύνολο $\{\overset{\circ}{A}, \partial A\}$ αποτελεί διαμέριση του \bar{A} διότι:
 $\overset{\circ}{A} \cup \partial A = \bar{A}$ και $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \emptyset$

— για κάθε $A \subset \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$ η οικογένεια $\{\overset{\circ}{A}, \partial A, \overset{\circ}{A^c}\}$ αποτελεί μια διαμέριση του \mathbb{R}^2
 (δηλ. $\mathbb{R}^2 = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup \overset{\circ}{A^c}$ και $\overset{\circ}{A} \cap \partial A = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{A^c} = A \cap \overset{\circ}{A^c} = \emptyset$).

Κυρτά - συνεκτικά σύνολα

Ένα μη κενό υποσύνολο A του \mathbb{R}^2 θα λέγεται **κυρτό**, αν και μόνο αν για κάθε $P, Q \in A$, έπεται $\overline{PQ} \subset A$.

$$\left(\text{όπου } \overline{PQ} = \{x \in \mathbb{R}^2 / x = \lambda P + (1 - \lambda)Q, 0 \leq \lambda \leq 1\} \right)$$

— Έστω $A \neq \emptyset$, υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , ορίζουμε **κυρτή θήκη** του A , το υποσύνολο T του \mathbb{R}^2 που ορίζεται:

$$T = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i / (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ πεπερ. οικογ. στο } \mathbb{R} + \text{ με } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, (X_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ πεπερ. οικογένεια σημείων στο } A \right\}.$$

Ένα υποσύνολο A του \mathbb{R}^2 θα λέγεται **συνεκτικό**, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν ανοιχτά, μη κενά και ξένα υποσύνολα X, Y του \mathbb{R}^2 , έτσι ώστε να ισχύουν
 $A \cap X \neq \emptyset$, $A \cap Y \neq \emptyset$ και $A \subset X \cup Y$.

Μια άμεση και βασική συνέπεια του ορισμού της συνεκτικότητας είναι ότι:-
 Αν A είναι συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 , το οποίο «τέμνει» το εσωτερικό και το εξωτερικό ενός υποσυνόλου B του \mathbb{R}^2 τότε θα «τέμνει» και το σύνολο του B .

$$(\text{δηλ. } A \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset \text{ και } A \cap \overset{\circ}{B^c} \neq \emptyset \Rightarrow A \cap \partial B \neq \emptyset).$$

Κατόπιν έχουμε τις γνωστές προτάσεις:

— Ένα μη κενό υποσύνολο της πραγματικής ευθείας \mathbb{R} είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι ένα διάστημα (ανοιχτό ή κλειστό ή ημιανοιχτό).

— Η ένωση κάθε οικογένειας συνεκτικών υποσυνόλων του \mathbb{R}^2 , που έχει μη κενή τομή, είναι συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 (ισχύει γενικά σε οποιοδήποτε τοπολογικό χώρο).

— Η εικόνα ενός συνεκτικού συνόλου μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης (μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων) είναι συνεκτικό σύνολο.

Οι παραπάνω προτάσεις έχουν σαν άμεσες συνέπειες διαδοχικά ότι:

— Κάθε ευθύγραμμο τμήμα \overline{PQ} , πολυγωνική γραμμή $\bigcup_{i=1}^n \overline{P_i P_{i+1}}$, πολυγωνικό τόξο, τόξο, γραμμή (path), καμπύλη του \mathbb{R}^2 , είναι συνεκτικά υποσύνολα.

— Κάθε μη κενό ανοιχτό υποσύνολο A του \mathbb{R}^2 είναι συνεκτικό αν και μόνο για κάθε $P, Q \in A$, υπάρχει πολυγωνική γραμμή $\bigcup_{i=1}^n \overline{P_i P_{i+1}}$ με $P_0 = P, P_n = Q$ που να περιέχεται στο A .

— Κάθε κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 είναι και συνεκτικό. Κάθε ανοικτός δίσκος είναι συνεκτικό υποσύνολο, και ακόμη το σύνορο και το εξωτερικό κάθε ανοικτού δίσκου είναι συνεκτικά υποσύνολα του \mathbb{R}^2 .

Αναφέρουμε ακόμη, το Θεώρημα Ενδιαμέσου Τιμής:

— Έστω $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής απεικόνιση (όπου X μπορεί να είναι ένας μετρικός ή και γενικότερα τοπολογικός χώρος), και K συνεκτικό υποσύνολο του X .

Αν $\alpha, \beta \in K, \alpha \neq \beta$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε c που ανήκει στο διάστημα με άκρα $f(\alpha), f(\beta)$, υπάρχει $\gamma \in K$ έτσι ώστε $f(\gamma) = c$.

Συνεκτικές συνιστώσες συνόλου

Έστω μη κενό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και x σημείο του A . Ονομάζουμε **συνεκτική συνιστώσα** του x στο A , την ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του A (το A θεωρείται τοπολογικός υπόχωρος του \mathbb{R}^2) που περιέχουν το x .

Από τον ορισμό, η συνεκτική συνιστώσα του x στο A , είναι το μέγιστο συνεκτικό υποσύνολο του A που περιέχει το x . Οι συνεκτικές συνιστώσες των σημείων του A , θα λέγονται απλά **συνιστώσες** του A .

Ισχύουν ακόμη τα ακόλουθα:

— Δυο συνιστώσες του (υπόχωρου) A είναι ξένα υποσύνολα του A ή αλλιώς συμπίπτουν. Αυτό έχει σαν συνέπεια, η κλάση όλων των διαφορετικών συνιστωσών του A να ορίζει μια **διαμέριση** του συνόλου.

— Κάθε συνιστώσα του A , είναι κλειστό υποσύνολο του (υπόχωρου) A .

Τέλος, σημειώνουμε τη χρήσιμη πρόταση ότι:

— Κάθε συνεκτική συνιστώσα ενός ανοικτού στο \mathbb{R}^2 υποσυνόλου A , είναι επίσης ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 .

Φραγμένα - Συμπαγή σύνολα

— Ένα υποσύνολο A του \mathbb{R}^2 θα λέγεται φραγμένο αν και μόνο περιέχεται σε κάποιο δίσκο (ανοιχτό ή κλειστό) του \mathbb{R}^2 .

— Ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^2 θα είναι συμπαγές αν και μόνο είναι κλειστό και φραγμένο (Θεώρημα Heine - Borel).

Έχουμε και τις προτάσεις:

— Κλειστά υποσύνολα, συμπαγών υποσυνόλων του \mathbb{R}^2 είναι επίσης συμπαγή.

— Τα συμπαγή υποσύνολα είναι πλήρη.

— Η εικόνα συμπαγούς συνόλου μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων είναι συμπαγές σύνολο.

— Εάν P είναι σημείο του \mathbb{R}^2 και K συμπαγές $\subset \mathbb{R}^2$ τότε:

$$P \in K \text{ αν και μόνο } \text{dist}(P, K) = 0$$

— Εάν K, A είναι συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R}^2 , τότε:

$$K \cap A = \emptyset \text{ αν και μόνο } \text{dist}(K, A) > 0.$$

Στην περίπτωση του $K \cap A = \emptyset$, αν θέσουμε $E = \text{dist}(K, A) > 0$, τότε τα υποσύνολα:

$$N\left(K, \frac{E}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 / \text{dist}(x, K) < \frac{E}{2}\right\},$$

$$N\left(A, \frac{E}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{R}^2 / \text{dist}(x, A) < \frac{E}{2}\right\}$$

ορίζουν δυο ξένες ανοιχτές περιοχές των K, A αντίστοιχα, στο \mathbb{R}^2 .

References

- [1]* Alexander, J. W.: A proof of Jordan's theorem about a simple closed curve. Ann. of Math. 21 (1920) 180–184
- [2] Alexandroff, P. S.: Combinatorial Topology, Vol. 1 of the English transl., Rochester, N.Y., 1956 (see Chap. II, pp. 39–64; presents the proof of [26])
- [3] Antoine, L.: Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. J. Math. pures appl. 4 (1921) 221–325
- [4] Behnke, H.; Sommer, F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. 3rd ed. Berlin-Heidelberg-New York 1963
- [5]* Bieberbach, L.: Über den Jordanschen Kurvensatz, die Schoenflieschen Sätze von Erreichbarkeit und Unbewalltheit und den Satz von der Invarianz des ebenen Gebietes. Jber. d. Dt. Math.-Verein. 22 (1913) 144–153
- [6] Bochner, S.: Mathematical reflections. Amer. Math. Month. 81 (1974) 827–852
- [7]* Brouwer, L. E. J.: Beweis des Jordanschen Kurvensatz. Math. Ann. 69 (1910) 169–175
- [8]* Brouwer, L. E. J.: Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve. Math. Ann. 72 (1912) 442–425 (contains implicitly another proof of the Jordan curve theorem)

- [9] Brouwer, L. E. J.: Beweis des Jordanschen Satzes für den n -dimensionalen Raum. *Math. Ann.* 71 (1911) 314–319
- [10]* Cairns, S. S.: An elementary proof of the Jordan-Schoenflies theorem. *Proc. of the A.M.S.* 2 (1951) 860–867
- [11] Dienes, P.: *The Taylor Series*. Oxford 1931 (presents Kerékjártó's proof [17, 18])
- [12]* Denjoy, A.: Nouvelle démonstration du théorème de Jordan sur les courbes planes, *Proc. Kon. Ak. Wetensch. Amsterdam* 21 (1918); repr. in: Denjoy, A.: *Un demi-siècle de Notes communiquées aux Académies*, vol. II. Paris 1957, 474–480
- [13] Dostal, M.: Solution of a problem of Jan Mařík. *Čas. Pěst. Mat.* 83 (1958) 240–241
- [14]* Filippov, A. F.: An elementary proof of the Jordan theorem. *Uspekhi Mat. Nauk* 5 (39) (1950) 173–176
- [15]* Hartogs, F.: Beweis des Jordanschen Kurvensatzes. *Math. Z.* 22 (1925) 62–74
- [16]* Jordan, C.: *Cours d'Analyse*, vol. III. Paris 1887 (see pp. 587–594); vol. I, 3rd ed. Paris 1893 (see §§ 96–103)
- [17]* Kerékjártó, B. von: Beweis des Jordanschen Kurvensatzes, *Math.-naturwiss. Ber. d. Ungar. Akad.* 38 (1919) 194–198
- [18] Kerékjártó, B. von: *Vorlesungen über Topologie I*. Berlin 1923 (see pp. 59–65; the proof is that of [17]; the same proof is presented in English in [11])
- [19] Kagan, V. F.: *Foundations of Geometry I*. Moscow-Leningrad 1949
- [20]* Lennes, N. J.: Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations. *Amer. J. of Math.* 33 (1911) 287–326 (in particular, see pp. 314–318)
- [21] Moise, E.: *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. 2nd ed. Reading, Mass.-Palo Alto-London 1974
- [22] Nasir-Eddin at Tûsi: *Euclidis Elementorum geometricorum libri tredecim. Ex traditione doctissimi Nasiridini Tusini nunc primum Arabice impressi*. Rome 1594
- [23] Pasch, M.: *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Leipzig 1882
- [24]* Pringsheim, A.: Über die äußere Berandung eines im Endlichen gelegenen Gebietes und den Jordanschen Kurvensatz. *Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl.* 2 (1922) 187–212
- [25] Pringsheim, A.: *Vorlesungen über Funktionentheorie*, vol. II, part I. Leipzig 1925 (repr. New York 1968)
- [26] Schmidt, E.: Über den Jordanschen Kurvensatz. *Sitz.-Ber. d. Preuß. Akad. Wiss.* 28 (1923) 318–329 (cf. also [2])
- [27]* Schoenflies, A.: Bemerkungen zu dem vorstehenden Aufsatz des Herrn L. E. J. Brouwer. *Math. Ann.* 68 (1910) 435–414
- [28] Schoenflies, A.: Über das eindeutige und stetige Abbildung des Kreises (Jordan-kurve). *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* 33 (1924) 147–157
- [29] Schoenflies, A.: Zusatz (Bemerkungen) zu den Beweisen von C. Jordan und Ch. J. de la Vallée Poussin. *Jber. d. Dt. Math.-Verein.* 33 (1924) 157–160 (critical comments and completion of the proofs in [16], [31])
- [30] Thron, W. J.: *The Theory of Functions of a Complex Variable*. New York 1953
- [31] Vallée-Poussin, Ch. J. de la: *Cours d'Analyse infinitésimale*, vol. I, Louvain-Paris 1903 (1st. ed., pp. 308–310; more details in the 3rd ed., 1914, pp. 374–379)

- [32]* Veblen, O.: Theory on plane curves in non-metrical analysis situs. Trans. of the A.M.S. 6 (1905) 83–98
- [33]* Vol'pert, A. I.: An elementary proof of the Jordan theorem. Uspekhi Mat. Nauk 5 (39) (1950) 168–172
- [34]* Winternitz, A.: Über den Jordanschen Kurvensatz und verwandte Sätze der Analysis Situs. Math. Z. 1 (1918) 329–337
- [35]* Whyburn, G. T.: Analytic Topology, A.M.S. Colloquium Publ. vol. 28, Providence 1942
- [36]* Young, W. H.; Young, G. Ch.: The Theory of Sets of Points. Cambridge 1906 (repr. Bronx, N.Y. 1972)
- [37] Zoratti, L.; Rosenthal, A.: Die Punktmengen. Leipzig 1923–1927. = Encyklopädie der Math. Wissenschaften, II C 9a (see vol. II, Part 3, 2nd half, pp. 916–923)

Παρατηρήσεις σ' ένα άρθρο της Μ.Ε. τ. 31

Του Δ.Γ. Κοιτογιάννη

Πρόσφατα έπεσε στα χέρια μας το τεύχος 31 της Μ.Ε. στις σελίδες 3-18 του οποίου υπάρχει το άρθρο «Να φύγει ο Ευκλείδης» — «Δεν θα γίνουμε εθνικοί μειοδότες» του συνάδελφου Ν. Καστάνη.

Ανεξάρτητα αν συμφωνούμε ή διαφωνούμε με το περιεχόμενό του, θα θέλαμε να κάνουμε μερικές παρατηρήσεις.

1) Στη σελ. 12 ο συγγραφέας αναφέρει:

«Και η αντίφαση αυτή εντείνεται τα τελευταία χρόνια, όταν κάτω από τον τίτλο Ευκλείδεια Γεωμετρία αναμειγνύονται και θέματα γεωμετρίας του Hilbert ή γεωμετρικοί μετασχηματισμοί (π.χ. η Ευκλείδεια Γεωμετρία του Σπ. Κανέλλου, ΟΕΔΒ 1977)».

Θα πρέπει να πούμε εδώ, ότι τα «θέματα» της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, του Σπ. Κανέλλου, όπως και η αξιωματική που χρησιμοποιείται στο βιβλίο αυτό είναι του Σοβιετικού μαθηματικού Α.Β. Παγκαρέλωφ (δες Α.Β. Pogorelov: Lectures on the foundations of Geometry, Noordhoff, Groningen 1966).

Αυτό άλλωστε αναφέρει και ο κ. Σπ. Κανέλλος στην εργασία του «Περί των γεωμετρικών αξιωμάτων της κινήσεως, Αθήναι 1975».

2) Στη σελ. 11 διαβάζουμε:

«Απ' την ιστορική αναδρομή που κάναμε δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι με τον όρο Ευκλείδεια γεωμετρία θεωρείται η συνθετική γεωμετρία, δηλ. η γεωμετρία που δεν στηρίζεται σε αναλυτικές τεχνικές που περιλαμβάνουν τη χρήση ενός ή άλλου συστήματος συντεταγμένων, αλλά σε αλυσιδωτή, απαγωγική, εξαγωγή συμπερασμάτων από αξιώματα».

Η παράγραφος αυτή είναι πιστή μετάφραση μιας παραγράφου από το γνωστό βιβλίο του Ι.Μ. Γιαγκλόμ «Η Γεωμετρία τότε και τώρα, Μόσχα 1972» στην αγγλική μετάφραση του οποίου ο συγγραφέας μας παραπέμπει. Όμως ο Ι.Μ. Γιαγκλόμ δεν αναφέρεται στην «Ευκλείδεια Γεωμετρία», αλλά στη Στοιχειώδη γεωμετρία του 19ου αιώνα.

Γιατί βέβαια ο συγγραφέας θα συμφωνήσει μαζί μας ότι σήμερα δεν ορίζεται έτσι η «Ευκλείδεια γεωμετρία», ούτε όμως και η «Στοιχειώδης γεωμετρία» που το περιεχόμενό της είναι πολύ πλατύτερο.

3) Στη σελ. 9 ο συγγραφέας αναφέρει:

«Μια αξιολογή προσπάθεια του μεσοδιαστήματος», που δεν πρέπει να την αγνοήσουμε, έγινε στις ΗΠΑ απ' τους G.D. Birkhoff και R. Beatley με την επαναθεμε-

λίωση της σχολικής γεωμετρίας στη βάση της μετρικής γεωμετρίας. Δυστυχώς η επίδρασή της δεν ήταν μεγάλη και το μόνο που κατάφερε ήταν να παρουσιάσει μια εναλλακτική άποψη του θέματος.

Προσωπικά πιστεύουμε ότι τα παραπάνω δεν ανταποκρίνονται ακριβώς στην πραγματικότητα. Ας πάρουμε τα πράγματα απ' την αρχή. Είναι γνωστό, ότι το πρόβλημα της αξιωματικής θεμελίωσης, αυτού που τότε ονομαζόταν «Ευκλείδεια γεωμετρία» λύθηκε το 19ο και 20ο αιώνα. Τα πιο «επιτυχημένα» (για διάφορους ειδικούς λόγους) αξιωματικά συστήματα της εποχής είναι τρία:

Του Ιταλού M. Pieri (1889), του Hilbert (1899) και του Ρώσου V. Kagan (1904). Από αυτά, εκείνο που επηρέασε περισσότερο τους μαθηματικούς του αιώνα μας ήταν χωρίς αμφιβολία εκείνο του Hilbert. Οι λόγοι για τους οποίους έγινε αυτό είναι ουσιαστικά τρεις:

α) Ο Hilbert δεν αρκέστηκε μόνο στην παρουσίαση του αξιωματικού του συστήματος, αλλά με βάση αυτό, έγραψε και το κλασικό βιβλίο "Grundlagen der geometrie", στο οποίο φαίνεται καθαρά πώς «λειτουργεί» το σύστημά του.

β) Η προσωπικότητα του Hilbert. Ο Hilbert είναι ο μοναδικός ίσως σύγχρονος μαθηματικός που εργάστηκε με επιτυχία τόσο στη Γεωμετρία, όσο και στην Άλγεβρα, Ανάλυση, Λογική, έτσι αν μη τι άλλο ήταν γνωστός στους περισσότερους από τους μαθηματικούς της εποχής του.

γ) Το αξιωματικό σύστημα του Hilbert μοιάζει πολύ με το «αξιωματικό σύστημα» των Στοιχείων του Ευκλείδη (τόσο που πολλοί ιστορικοί των μαθηματικών αποδέχονται το σχήμα: Αιγυπτιακή γεωμετρία - Στοιχεία Ευκλείδη - Grundlagen der Geometrie του Hilbert, π.χ. ο H. Freudenthal) και από την άποψη αυτή ήταν κάτι οικείο για τους Ευρωπαίους μαθηματικούς.

Το αξιωματικό σύστημα του Hilbert έχει όμως ένα αξεπέραστο μειονέκτημα: Δεν είναι δυνατό να γραφεί σχολικό εγχειρίδιο γεωμετρίας με βάση το σύστημα αυτό. Οι λόγοι είναι προφανείς. Έτσι αρκετά νωρίς, διάφοροι μαθηματικοί και παιδαγωγοί άρχισαν να προσανατολίζονται σε άλλα αξιωματικά συστήματα. Ένας από αυτούς ήταν και ο γνωστός Αμερικανός G. Birkhoff. Θα πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ, ότι η μαθηματική παιδεία των ΗΠΑ κατά τον 19ο αιώνα ήταν ουσιαστικά ανύπαρκτη και η επιρροή των Στοιχείων του Ευκλείδη ελάχιστη. Ο Birkhoff με αφετηρία το αξιωματικό σύστημα του Ρώσου Kagan δημιούργησε το 1932 ένα νέο αξιωματικό σύστημα επαναστατικό για την εποχή του, αφού τα πιο «δύσκολα» αξιώματα των άλλων τα αντικαθιστούσε με δυο «απλά»: Το αξίωμα «του κανόνα» και το αξίωμα «του μοιρογνώμονιου». Με τον τρόπο αυτό βέβαια η θεμελίωση της «Ευκλείδειας γεωμετρίας» τελικά ανάγονταν στη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Προσωπικά πιστεύουμε ότι οι εργασίες του Cœlès την ίδια εποχή θα πρέπει να έδωσαν κάποιες αφορμές στον Birkhoff.

Με τη βοήθεια του παιδαγωγού R. Beatley ο Birkhoff έγραψε το εγχειρίδιο γεωμετρίας (1933) (β' έκδοση 1941), που επηρέασε βαθύτατα τους συγγραφείς των ΗΠΑ.

Έτσι πολλά βιβλία γεωμετρίας γράφτηκαν με το αξιωματικό σύστημα του Birkhoff, π.χ. το κλασικό βιβλίο των E. Moise - F. Downs. Το βιβλίο αυτό κυκλοφό-

ρησε μεταφρασμένο στην ΕΣΣΔ το 1972 μαζί με κριτική του Ι.Μ. Γιαγκλόμ.

Την ίδια εποχή ο Σοβιετικός γεωμέτρης Α.Β. Παγκαρέλωφ, που όπως είδαμε είχε ήδη επεξεργασθεί ένα αξιωματικό σύστημα (αυτό που υπάρχει στο βιβλίο του Σ. Κανέλλου), επηρεασμένος από το σύστημα Birkhoff, αρχίζει να πειραματίζεται για την κατασκευή άλλου συστήματος.

Θα αναφέρουμε ακόμα εδώ, ότι ο Α.Β. Παγκαρέλωφ θεωρείται γεωμέτρης της σχολής του Kagan (που το σύστημά του ήταν η αφετηρία του αξιωματικού συστήματος Birkhoff).

Το 1977 ο Παγκαρέλωφ κυκλοφορεί πειραματικό βιβλίο γεωμετρίας με βάση ένα νέο «σχολικό» αξιωματικό σύστημα, που επίσης περιέχει τα δυο «μετρικά» αξιώματα του Birkhoff, αλλά πολύ πιο πρακτικό. Π.χ. το σύστημα του Birkhoff αποτελείται από 24 αξιώματα, ενώ του Παγκαρέλωφ από 9.

Μετά από 5 χρόνια επιτυχή πειραματική διδασκαλία σε σχολεία της ΕΣΣΔ το 1983 ο Παγκαρέλωφ παρουσίασε το σύστημά του στο Διεθνές συνέδριο μαθηματικών (Βαρσοβία 1983, δες Proceedings of the Inter. Congres of Math. August 16-24 1983, Warszawa, V (η North - Holland 1984). Από την ίδια χρονιά οι μαθητές της ΕΣΣΔ διδάσκονται σε μάθημα της γεωμετρίας με το αξιωματικό σύστημα Παγκαρέλωφ (Γεωμετρία 6-10). Λίγο αργότερα κυκλοφορούν εγχειρίδια γεωμετρίας με το σύστημα Παγκαρέλωφ (ή παραλλαγές του) και σε άλλες χώρες (π.χ. Ρουμανία, Πολωνία, ΗΠΑ κ.λπ.). Όστε το σύστημα του Birkhoff επηρέασε το σχολείο.

Στη χώρα μας τώρα:

Με εισήγηση του υπογράφοντα το αξιωματικό σύστημα Παγκαρέλωφ χρησιμοποιήθηκε σε βιβλίο γεωμετρίας με το οποίο πήρε μέρος σε διαγωνισμό του ΥΠΕ-ΠΘ (1984) ομάδα συναδέλφων (Δ. Ανάγνου, Δ. Κοντογιάννης, Π. Μαρουσάκης, Γ. Μενδωνίδης, Γ. Ντάνης). Αργότερα χρησιμοποιήθηκε στο βιβλίο του υπογράφοντα. Μαθηματικές Ολυμπιάδες, Γεωμετρία Ι, Αθήνα 1987.

Τέλος κάποια αξιώματα χρησιμοποιήθηκαν και στο σχολικό βιβλίο «Θεωρητική Γεωμετρία» της Β' Λυκείου, με την πρόθεση να θεμελιωθεί η σχολική μας γεωμετρία με βάση το σύστημα αυτό.

Τελειώνοντας θα θέλαμε να παρατηρήσουμε στο συνάδελφο Καστάνη ότι ο όρος «διεθνή δεδομένα» που κατά κόρον χρησιμοποιεί, θα έπρεπε ίσως να αντικατασταθεί με το «χώρες που επηρεάζονται από προγράμματα του ΟΟΣΑ».

Μετασχηματισμοί στο τρίγωνο και εφαρμογές

S. BILCHEV*

Τεχν. Παν. Russe

E.A. VELIKOVA

Μαθημ. Γυμν. Russe

Απόδοση: Δ. Κοντογιάννη

Στο άρθρο αυτό εισάγονται δέκα μετασχηματισμοί για τρίγωνο που δίνουν καινούριες γεωμετρικές ανισότητες.

Οι μετασχηματισμοί είναι μια από τις πιο ενδιαφέρουσες μεθόδους για να δημιουργήσουμε γεωμετρικές ανισότητες σ' ένα τρίγωνο.

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο εξής:

Έστω Δ ένα τρίγωνο και $a, \beta, c, s, R, r, F, \dots$ στοιχεία του, όπου: a, β, c οι πλευρές, s η ημιπερίμετρος, R ακτίνα περικύκλου, r η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, F το εμβαδό,

Έστω ακόμα Δ_i ένα άλλο τρίγωνο με στοιχεία: $a_i, \beta_i, c_i, s_i, R_i, r_i, F_i, \dots$ που είναι συναρτήσεις στοιχείων του τριγώνου Δ .

Έστω τέλος μια σχέση

$$I(a, \beta, c, s, R, r, F, \dots) \geq 0 \quad (1)$$

που ισχύει για το τρίγωνο Δ .

Τότε θα ισχύει και η ανισότητα:

$$I_i = I(a_i, \beta_i, c_i, s_i, R_i, r_i, F_i, \dots) \geq 0 \quad (2)$$

Η ανισότητα (2) κι οι τύποι δια μέσου των οποίων παίρνουμε τα

$$a_i, \beta_i, c_i, s_i, R_i, r_i, F_i, \dots$$

ως συναρτήσεις των a, β, c, s, R, r, F συνήθως ονομάζονται αντίστοιχα **δυνακή ανισότητα της (I) (DI)** και **τύποι του δυνακού μετασχηματισμού (FDI)**.

Στο άρθρο αυτό θα δούμε μερικούς από τους πιο βασικούς μετασχηματισμούς.

1. Ο δυνακός μετασχηματισμός της διαμέσου (MDT).

Είναι γνωστό ότι οι διάμεσοι m_a, m_b, m_c ενός τριγώνου Δ σχηματίζουν τρίγωνο Δ_1 .

Στην περίπτωση αυτή έχουμε τους παρακάτω FDT, που εύκολα μπορεί να δείξει ο αναγνώστης.

$$a_1 = m_a, \dots, s_1 = \frac{1}{2} \sum m_a, R_1 = \frac{\Pi m_a}{3F}, r_1 = \frac{3F}{2 \sum m_a},$$

* Ο S. Bilchev (δύο φορές ολυμπιονίκης στις Διεθνείς Μαθηματικές Ολυμπιάδες) είναι καθηγητής στο Πολυτεχνείο του Rousse (Βουλγαρία) στην έδρα των διαφορικών εξισώσεων. Επίσης είναι παγκόσμια γνωστός για τις εργασίες του σε θέματα γεωμετρικών ανισοτήτων, που κατά καιρούς έχουν δημοσιευθεί σε διάφορα περιοδικά (Crux, Monthly κ.λπ.).

Το παραπάνω άρθρο είναι μια διάλεξη που έδωσε τον περασμένο Οκτώβρη στην E.M.E.

$$F_1 = \frac{3}{4} F, \quad m_{a1} = \frac{3}{4} m_a, \quad u_{a1} = \frac{3F}{2m_a},$$

$$l_{a1} = \frac{3F}{m_b m_c} \sqrt{m_b m_c (m_b + m_c - m_a)} \Sigma m_a$$

$$r_{a1} = \frac{3F}{2(m_b + m_c - m_a)} \quad \text{κ.λπ.}$$

όπου u_a, l_a, r_a το ύψος, η διχοτόμος και η ακτίνα του παραγεγραμμένου κύκλου, που αντιστοιχούν στην πλευρά a .

Το μετασχηματισμό αυτό θα συμβολίζουμε $I \Rightarrow I_1 = \hat{I}$.

Είναι εύκολο να δούμε, ότι αν εφαρμόσουμε δυο φορές το μετασχηματισμό MDT στη σχέση (1), θα ξαναπάρουμε την (1), αφού

$$a \Rightarrow m_a \Rightarrow \frac{3}{4} a$$

$$\text{Ώστε } I \Rightarrow I_1 = \hat{I} \Rightarrow I_1 = I \quad \text{δηλ. } I \Leftrightarrow \hat{I} = I_1.$$

Παραδείγματα (δες [1]):

$$1) \quad S^2 \geq 3F \sqrt{3} \Leftrightarrow (\Sigma m_a)^2 \geq 9F \sqrt{3}.$$

$$2) \quad (abc)^2 \geq \left(\frac{4F}{\sqrt{3}}\right)^3 \Leftrightarrow (\Pi m_a)^2 \geq (F \sqrt{3})^3.$$

$$3) \quad 4F \sqrt{3} + \Sigma (\beta - c)^2 \leq \Sigma a^2 \leq 4F \sqrt{3} + 3\Sigma (\beta - c)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12F \sqrt{3} + 3\Sigma a^2 \leq 8\Sigma m_b m_c \leq 4F \sqrt{3} + 5\Sigma a^2.$$

$$4) \quad \Pi r_a \leq \Pi m_a \Leftrightarrow \Sigma m_a \leq \frac{9}{2} R.$$

$$5) \quad \Sigma \frac{1}{m_a} \leq \frac{1}{r} \Leftrightarrow \Sigma \beta c \leq 2R \Sigma m_a.$$

$$6) \quad \Sigma (a - \beta)(a - c) m_a^2 \geq 0 \Leftrightarrow \Sigma (m_a - m_b)(m_a - m_c) a^2 \geq 0.$$

2. Ο μετασχηματισμός του παραλληλογράμμου (PT)

Έστω τρίγωνο $\Delta = ABC$ και $CM = m_c$ η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά C . Αν την προεκτείνουμε κατά $MC_1 = CM$ θα πάρουμε το τρίγωνο ACC_1 με πλευρές $AC_1 = a$, $AC = \beta$, $CC_1 = 2m_c$.

Ώστε από το τρίγωνο ABC παίρνουμε το τρίγωνο ACC_1 με τη βοήθεια του μετασχηματισμού PT ως προς την πλευρά C . Θα γράψουμε λοιπόν $PT(c)$, δηλ.

$$I \xrightarrow{PT(c)} I^c$$

Ο μετασχηματισμός αυτός έχει τους παρακάτω FDT.

$$\alpha_2 = \alpha, \quad \beta_2 = \beta, \quad c_2 = 2m_c, \quad s_2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) + m_c, \quad R_2 = \frac{\alpha\beta m_c}{2F},$$

$$r_2 = \frac{2F}{\alpha + \beta + 2m_c}, \quad F_2 = F, \quad m_{c2} = \frac{C}{2}, \quad r_{a2} = \frac{2F}{\beta + 2m_c - \alpha},$$

$$r_{\beta 2} = \frac{2F}{2m_c + \alpha - \beta}, \quad r_{c2} = \frac{2F}{\alpha + \beta - 2m_c}, \quad U_{a2} = U_a,$$

$$U_{\beta 2} = U_\beta, \quad U_{c2} = \frac{F}{m_c}.$$

Περισσότερα δεξ ([2]—[3])

Παραδείγματα:

$$1) \quad \Sigma \alpha^2 \leq 4\sqrt{3}F \xrightarrow{PT(c)} 3\alpha^2 + 3\beta^2 - c^2 \geq 4\sqrt{3}F.$$

$$2) \quad \Sigma \beta^2 c^2 \geq 16F^2 \xrightarrow{PT(c)} 2\alpha^4 + 2\beta^4 + 5\alpha^2\beta^2 - \beta^2 c^2 - c^2\alpha^2 \geq 16F^2.$$

$$3) \quad 3\sqrt{3}r \leq S \xrightarrow{PT(c)} 12\sqrt{3}F \leq (\alpha + \beta + 2m_c)^2.$$

$$4) \quad 3\sqrt{3}F \leq \Sigma \alpha^2 - \Sigma (\beta - c)^2 \xrightarrow{PT(c)} 4\sqrt{3}F + 3(\alpha^2 + \beta^2) \leq 4(\alpha + \beta)m_c + 2\alpha\beta + c^2.$$

$$5) \quad \Sigma \alpha^4 \geq 16F^2 \xrightarrow{PT(c)} 5\alpha^4 + 5\beta^4 + c^4 + 8\alpha^2\beta^2 - 4\beta^2 c^2 - 4c^2\alpha^2 \geq 16F^2.$$

Σε κάθε ένα από τα παραδείγματα αυτά, το ίσον ισχύει αν και μόνο αν

$$\alpha : \beta : c = 1 : 1 : \sqrt{3}.$$

Φυσικά μπορούμε να συνδυάσουμε μερικούς $PT(c)$ είτε $PT(\beta)$ με άλλους μετασχηματισμούς (π.χ. MDT).

Έτσι χρησιμοποιούμε πολλές φορές τους μετασχηματισμούς:

1ο) Με τη χρησιμοποίηση του $PT(c) * PT(\beta)$ έχουμε:

$$I(\alpha, \beta, c, F) \geq \Rightarrow I^{\beta} = I\left(\alpha, \sqrt{6\alpha^2 + 3\beta^2 - 2c^2}, 2m_c, F\right) \geq 0$$

(Το ίσον αν και μόνο αν $\alpha : \beta : c = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{7}$).

Παραδείγματα

$$1) \quad \Sigma \alpha^2 \geq 4\sqrt{3}F \Rightarrow 9\alpha^2 + 5\beta^2 - 3c^2 \geq 4\sqrt{3}F.$$

$$2) \quad S b^2 c^2 \geq 16F^2 \Rightarrow 20\alpha^4 + 6\beta^4 + 2c^4 + 23\alpha^2\beta^2 - 7\beta^2 c^2 - 13c^2\alpha^2 \geq 16F^2.$$

2ο) Με τη χρησιμοποίηση του $PT(c) * PT(\beta) * PT(\alpha)$ έχουμε:

$$I(\alpha, \beta, c, F) \geq 0 \Rightarrow I^{c\beta\alpha} \equiv I\left(\sqrt{15\alpha^2 + 10\beta^2 - 6c^2}, \sqrt{6\alpha^2 + 3\beta^2 - 2c^2}, 2m_c, F\right) \geq 0.$$

(Το ίσο αν και μόνο αν $\alpha : \beta : c = \sqrt{3} : \sqrt{7} : \sqrt{19}$).

Παραδείγματα:

$$1) \quad \Sigma \alpha^2 \geq 4\sqrt{3}F \Rightarrow 23\alpha^2 + 15\beta^2 - 9c^2 \geq 4\sqrt{3}F.$$

$$2) \quad \Sigma \beta^2 c^2 \geq 16F^2 \Rightarrow 131\alpha^4 + 56\beta^4 + 20c^4 + 173\alpha^2\beta^2 - 67\beta^2 c^2 - 103c^2\alpha^2 \geq 16F^2.$$

3ο) Με τη χρησιμοποίηση του $PT(c) * PT(\beta) * PT(\alpha) * PT(c)$ έχουμε:

$$I(\alpha, \beta, c, F) \geq 0 \Rightarrow I^{c\beta\alpha c} \equiv I\left(\sqrt{15\alpha^2 + 10\beta^2 - 6c^2}, \sqrt{6\alpha^2 + 3\beta^2 - 2c^2}, \sqrt{40\alpha^2 + 24\beta^2 - 15c^2}, F\right) \geq 0.$$

(Το ίσο αν και μόνο αν $\alpha : \beta : c = \sqrt{7} : \sqrt{19} : 7$).

Παραδείγματα:

$$1) \quad \Sigma \alpha^2 \geq 4\sqrt{3}F \Rightarrow 61\alpha^2 + 37\beta^2 - 23c^2 \geq 4\sqrt{3}F.$$

$$2) \quad \Sigma \beta^2 c^2 \geq 16F^2 \Rightarrow 930\alpha^4 + 342\beta^4 + 132c^4 + 1129\alpha^2\beta^2 - 425\beta^2 c^2 - 701c^2\alpha^2 \geq 16F^2.$$

3. Ο μετασχηματισμός τετραγωνικής ρίζας (SRT)

Είναι σε όλους γνωστό, ότι αν α, β, c πλευρές του τριγώνου Δ , τότε και οι $\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \sqrt{c}$ είναι πλευρές τριγώνου Δ_3 .

Έτσι έχουμε το μετασχηματισμό SRT με τους παρακάτω FDT.

(Δες [4])

$$\left(\begin{array}{l} \alpha_3 = \sqrt{\alpha}, \quad \kappa.λπ. \\ S_3 = \frac{1}{2} \Sigma \sqrt{\alpha}, \quad R_3 = \sqrt{\frac{SR}{4R+r}}, \quad r_3 = \frac{\sqrt{r(4R+r)}}{\Sigma \sqrt{\alpha}}, \\ F_3 = \frac{1}{2} \sqrt{r(4R+r)}, \quad U\alpha_3 = \sqrt{\frac{r(4R+r)}{\alpha}}, \quad m\alpha_3 = \sqrt{S - \frac{3}{4}\alpha} \end{array} \right) \quad (1)$$

Παραδείγματα:

$$1) \quad \Sigma \alpha^2 \leq 9R^2 \Rightarrow 2r \leq R.$$

$$2) \quad 4\sqrt{3}F + \Sigma (\beta - c)^2 \leq \Sigma \alpha^2 \leq 4\sqrt{3}F + 3\Sigma (\beta - c)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S + \sqrt{37(4R+r)} \leq \Sigma \sqrt{\beta c} \leq \frac{1}{3} (5S + \sqrt{3r(4R+r)})$$

4. Ο μετασχηματισμός T_1^2

Στο [13] υπάρχει η απόδειξη, ότι τα

$$a_4 = a(s-a), \beta_4 = \beta(s-\beta), c_4 = c(s-c)$$

είναι πλευρές τριγώνου ΔT_1^2 . Έτσι παίρνουμε το μετασχηματισμό T_1 με τους παρακάτω FDT.

$$\begin{aligned} a_4 &= a(s-a), \dots, & S_4 &= r(4R+r), & R_4 &= R_s \sqrt{\frac{r}{4R+r}}, \\ r_4 &= r_s \sqrt{\frac{r}{4R+r}}, & F_4 &= F_r \sqrt{r(4R+r)}, & S_4 - a_4 &= \frac{F_r}{s-a}, \\ r_{a_4} &= (s-a) \sqrt{r(4R+r)}, & U_{a_4} &= \frac{2F_r \sqrt{r(4R+r)}}{a(s-a)} \end{aligned}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $a \xrightarrow{T_1^2 * T_1^2} F_r a$, κ.λπ. Δηλαδή με τη χρησιμοποίηση του $T_1^2 * T_1^2$ ξαναγυρίζουμε στην αρχική μας σχέση. Έτσι γράφουμε συμβολικά

$$I \xrightarrow{T_1^2} I_{T_1^2} \quad \text{ή} \quad I_{T_1^2} * T_1^2 = I.$$

Παραδείγματα:

- 1) $2r \leq R \Leftrightarrow 2r \leq R$.
- 2) $\Sigma a^2 - \Sigma (\beta - c)^2 \geq 4\sqrt{3}F \Leftrightarrow s^2 \geq 3r(4R+r)$.
- 3) $s \leq \sqrt{4R+r} (2\sqrt{R+r} - \sqrt{3r}) \Leftrightarrow a^2 + \beta^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}F$.
- 4) $s\sqrt{3} \leq 4R+r \Leftrightarrow \Sigma a^2 - \Sigma (\beta - c)^2 \leq 4s \sqrt{\frac{r}{3}(4R+r)}$.
- 5) $\frac{3\sqrt{3}}{2(R+r)} \leq \Sigma \frac{1}{a} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r} \Leftrightarrow$
 $\frac{3\sqrt{3}}{2(R+r)} \sqrt{r(4R+r)} \leq \Sigma \frac{r_a}{a} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{r}(4R+r)}$.
- 6) $\Sigma \frac{a^2}{U_\beta^2 + U_c^2} \geq 2 \Leftrightarrow \Sigma \frac{1}{\beta^2(s-\beta)^2 + c^2(s-c)^2} \geq \frac{r(4R+r)}{2R^2F^2}$.

5. Ο μετασχηματισμός T_1

Είναι φανερό, ότι αφού οι $a(s-a), \dots$ είναι μεγέθη πλευρών τριγώνου, τότε και οι $a_s = \sqrt{a(s-a)}$, θα είναι μεγέθη πλευρών ενός τριγώνου, έστω ΔT_1 . Γεωμετρικά αυτό θα πει ότι το τρίγωνο ΔT_1 είναι όμοιο με το τρίγωνο $A_s' B_s' C_s'$ (Σχ. 1), (όπου A_s', B_s', C_s' τα σημεία επαφής των πλευρών του ABC με τον εγγεγραμμένο του

κύκλο) με λόγο ομοιότητας $\kappa = \sqrt{\frac{R}{r}}$. Εύκολα μπορούμε τότε να δείξουμε ότι:

$$(I) \begin{cases} a_s = \sqrt{a(s-a)}, & R_s = \sqrt{Rr}, & r_s = \frac{F}{\sum \sqrt{a(s-a)}}, \\ F_s = \frac{F}{2}, & Ua_s = \frac{F}{\sqrt{a(s-a)}}, & A_s = \frac{\pi - A}{2} \quad \kappa.λπ. \end{cases}$$

Το μετασχηματισμό με FDT των (I) θα τον λέμε T_1 - μετασχηματισμό.

Παραδείγματα:

$$1) \Sigma a^2 \geq 4\sqrt{3}F \Rightarrow \Sigma a^2 - \Sigma(\beta - c)^2 \geq 4\sqrt{3}F \quad \text{ή} \quad \Sigma \frac{a}{ra} \geq 2\sqrt{3}.$$

$$2) \Sigma a^4 \geq 16F^2 \Rightarrow \Sigma \left(\frac{a}{ra}\right)^2 \geq 4 \quad \text{ή} \quad \Sigma [a(r-a)]^2 \geq 4F^2.$$

$$3) \Sigma \beta^2 c^2 \geq 16F^2 \Rightarrow \Sigma \frac{\beta c}{r_\beta r_c} \geq 4 \quad \text{ή} \quad \Sigma \beta^2 c^2 \geq s^2 (s^2 - 8Rr + 5r^2).$$

Είναι φανερό, ότι νέες ανισότητες που παίρνουμε με τον T_1 μετασχηματισμό είναι καλύτερες από τις αρχικές.

$$4) 3\sqrt{3}r \leq s \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow \sqrt{6F\sqrt{3}} \leq \Sigma \sqrt{a(s-a)} \leq 3\sqrt{3Rr}.$$

Φυσικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και

$$T_1 \circ T_1 \circ \dots \circ T_1 = T_1^n \text{ μετασχηματισμό.}$$

n - φορές

Παραδείγματα

$$5) \Sigma \beta^2 c^2 \geq 4F^2 \xrightarrow{T_1^2} (4R+r)^2 + 2s\sqrt{\frac{R}{r}} \cdot \Sigma \sqrt{a(s-a)} \geq \\ \geq s^2 + 2s(4R+r)\sqrt{Rr} \cdot \Sigma \frac{1}{\sqrt{a(s-a)}}.$$

$$6) \frac{\sqrt{3}}{R} \leq \Sigma \frac{1}{a} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r} \xrightarrow{T_1^3} \sqrt{6-3\sqrt{2}} \leq$$

$$\leq \Sigma \left((\sqrt{2} + 1) \operatorname{csc} \frac{A}{8} - \eta \mu \frac{A}{8} \right)^{-1}.$$

6. Ο μετασχηματισμός T_1^{-1}

Έστω ABC οξυγώνιο τρίγωνο με ύψη AA_0 , BB_0 , CC_0 . Αν στο τρίγωνο ABC αντιστοιχίσουμε ένα τρίγωνο $A_0B_0C_0$ όμοιο με το $A_0B_0C_0$ με συντελεστή ομοιότητας $\kappa = \frac{2R}{d}$, όπου $d^2 = s^2 - (2R + r)^2$, θα πάρουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό T_1^{-1} του T_1 . Ο T_1^{-1} έχει FDT:

$$a_0 = \frac{2R^2}{d} \eta \mu 2A = \frac{a^2 (\beta^2 + c^2 - a^2)}{2Fd}, \dots, s_0 = \frac{2F}{d},$$

$$R_0 = \frac{R^2}{d}, \quad r_0 = d, \quad F_0 = 2F, \quad s_0 - a_0 = d \varepsilon \varphi A,$$

$$r_{00} = \frac{2F}{d} \sigma \varphi A, \quad U_{00} = \frac{2Fd}{R^2 \eta \mu 2A}, \quad A_0 = \pi - 2A, \quad \text{κ.λπ.}$$

Παραδείγματα:

$$1) \quad s \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow F \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} R^2.$$

$$2) \quad \left(\Sigma \eta \mu \frac{A}{2} \right)^2 \leq \Sigma \operatorname{csc}^2 \frac{A}{2} \Rightarrow s^2 \geq 2R^2 + 8Rr + 3r^2.$$

$$3) \quad 27Rr \leq 2s^2 \Rightarrow \Pi \sigma \nu A \leq \frac{2F^2}{27R^4} \quad \text{ή} \quad s^2 \geq \frac{27R^2}{27R^2 - 8r^2} (2R + r)^2 \quad (3')$$

Οι συγγραφείς πιστεύουν, ότι η (3') μας δίνει το καλύτερο ρητό άνω φράγμα του s^2 .

7. Ο μετασχηματισμός GT_1

Έχει αποδειχθεί [21] ότι υπάρχει τρίγωνο $A_1B_1C_1$ με πλευρές

$$a_1 = \sqrt{\alpha [2\kappa s - (\kappa + 1) \alpha]}, \dots \quad \text{όπου} \quad \kappa \in \mathbb{R}, \quad \kappa \geq 1.$$

Έτσι έχουμε το μετασχηματισμό $GT_1(\kappa)$ με τύπους FDT

$$a_1 = \sqrt{\alpha [2\kappa s - (\kappa + 1) \alpha]}, \dots$$

$$F_1 = F \sqrt{2\kappa (\kappa - 1) \frac{R}{r} + 1},$$

$$R_2 = \sqrt{\frac{R}{2} + \frac{\kappa(\kappa-1)^2 s^2 + (\kappa+1)^2 r [2(\kappa-1)R + \kappa r]}{2\kappa(\kappa-1)R + r}}$$

Εύκολα δείχνουμε ότι $GT_2(1) = T_1$.

Παραδείγματα:

$$1) \quad \Sigma \alpha^2 \geq 4\sqrt{3}F \Rightarrow 2\kappa \Sigma \beta c - \Sigma \alpha^2 \geq 4\sqrt{3}F \sqrt{2\kappa(\kappa-1)\frac{R}{r} + 1} \Rightarrow$$

$$2\kappa \Sigma \beta c - \Sigma \alpha^2 \geq 4\sqrt{3}F \sqrt{2\kappa(\kappa-1)\frac{R}{r} + 1} \geq (2\kappa-1)4\sqrt{3}F \geq 4\sqrt{3}F.$$

Είναι ενδιαφέρον, ότι για $\kappa = 1$, από τη σχέση αυτή παίρνουμε τη γνωστή ανισότητα Finsler - Hadwiger.

$$2) \quad \Sigma \beta^2 c^2 \geq 16F^2 \Rightarrow \Sigma \beta^2 c^2 \geq \frac{4s^2}{(\kappa+1)^2} [\kappa s^2 + 2\kappa(\kappa-5)Rr + (\kappa+4)r^2] \geq$$

$$\geq \frac{8s^2}{(\kappa+1)^2} [\kappa(\kappa+3)Rr - 2(\kappa-1)r^2] \geq 16F^2.$$

$$3) \quad \Sigma \alpha^2 \leq 9R^2 \xrightarrow{GT_2(3)} s^2 \geq \frac{4r}{3R-2r} (12R^2 - 11Rr + r^2).$$

Η ανισότητα αυτή αποτελεί κατά τους συγγραφείς το καλύτερο ρητό κάτω φράγμα του s^2 .

9. Ο μετασχηματισμός GES.

Αν αντιστοιχίσουμε το τρίγωνο $A_0B_0C_0$ με πλευρές $a_0 = \sqrt{\beta c}$, ..., στο τρίγωνο ABC με $A, B, C > \text{τοξών}$ $\frac{31}{32} \approx 14^\circ 21' 42''$ θα πάρουμε τον GES μετασχηματισμό με FDT:

$$a_0 = \sqrt{\beta c}, \quad F_0 = \sqrt{\frac{R}{r}F^2 - \frac{1}{16}\Sigma \beta^2 c^2} = \sqrt{2\frac{R}{r}F^2 - \frac{1}{16}(\Sigma \beta c)^2}.$$

Παραδείγματα:

$$1) \quad \Sigma \beta c \geq 4\sqrt{3}F \Rightarrow 2\Sigma \sqrt{\beta c} + 3\Sigma \frac{\beta c}{\alpha} \geq 5(\alpha + \beta + c).$$

$$2) \quad \Sigma \beta^2 c^2 \geq 16F^2 \Rightarrow \Sigma \beta^2 c^2 \geq 8Rrs^2.$$

$$3) \quad \Sigma a^2 \leq 4 \sqrt{3} F + 3 \Sigma (\beta - c)^2 \Rightarrow 6 \sqrt{abc} \cdot \Sigma \sqrt{a} \leq 4F_9 \sqrt{3} + 5 \Sigma \beta c.$$

απ' όπου παίρνουμε:

$$6 \Sigma \sqrt{a} - 5 \Sigma \sqrt{\frac{\beta c}{a}} \leq \sqrt{3} (\alpha + \beta + c)$$

αν λάβουμε υπόψη ότι: $F_9 \leq s \sqrt{\frac{Rr}{2}}, \quad R_9 \leq \sqrt{2Rr}.$

10. Ο μετασχηματισμός PMII* (Polar moment of inertia inequality)* (Ανισότητα πολικής ροπής αδρανείας)

Έστω $x, y, z \in \mathbb{R}$ με $xyz \Sigma x \geq 0$ και $0 < t \leq 2$.

Τότε ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες [4]:

$$** \quad \Sigma yza^t \leq \frac{1}{3} (\Sigma x)^2 (R \sqrt{3})^t, \quad |\Sigma yza^t| \geq \sqrt{3\lambda} \left(\frac{4F}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{t}{2}},$$

όπου $\lambda = xyz \Sigma x \geq 0$.

Οι ανισότητες αυτές συμπληρώνονται και γενικεύονται με χρήση μετασχηματισμών: MD, T_1^2, T_1 και T_1^{-1}

$$3 (\sqrt{3} F)^t \Sigma yzm_a^t \leq (\Sigma x)^2 \cdot (\Pi m_a)^t, \quad |\Sigma yzm_a^t| \geq \sqrt{3\lambda} (\sqrt{3} F)^{\frac{t}{2}}$$

$$\Sigma yza^t (s - a)^t \leq \frac{1}{3} (\Sigma x)^2 \left(sR \sqrt{\frac{3r}{4R + r}} \right)^t$$

$$|\Sigma yza^t (s - a)^t| \geq \sqrt{3\lambda} \left(4Fr \sqrt{\frac{r}{3} (4R + r)} \right)^{\frac{t}{2}}$$

κ.λπ. (δες π.χ. [5]).

* Ένα σημαντικό θεώρημα που χρησιμεύει πολύ στο μετασχηματισμό PMII είναι το γνωστό από τη Μηχανική θεώρημα Lagrange: «Η ροπή αδρανείας J_s κάθε συστήματος υλικών σημείων s είναι ίση με τη ροπή αδρανείας J_z όπου z το κέντρο βάρους του s συν τη ροπή αδρανείας ως προς το σημείο με μάζα ίση με το άθροισμα των μαζών των σημείων του s ».

** Δηλ. $yz a^t + zx \beta^t + xy c^t \leq \frac{1}{3} (x + y + z)^2 (R \sqrt{3})^t$

όπου α, β, γ τα μέτρα των πλευρών του αρχικού τριγώνου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] O. Bottema, κ.α. Geometric inequalities, Groningen 1969.
- [2] S. Bilchev, E. Velikova: Njakoi asimetricni neravenstra za triungolnika, Matem. 4 (1986), 13-17.
- [3] S. Bilchev, E. Velikova: On one generalization of the parallelogram's transformation, BAN 1986.
- [4] S. Bilchev, E. Velikova: Prilozenie na njakoi..., VTU 1986.
- [5] S. Bilchev, E. Velikova: The median duality in a triangle and its applications in geom. inequalities, BAN 1985.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Το σύνολο N των φυσικών αριθμών

Κατασκευή των συνόλων:

Z των ακεραίων αριθμών

Q των ρητών αριθμών

R των πραγματικών αριθμών

ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΕΞΑΡΧΑΚΟΣ

1. Τι είναι αριθμητικό σύστημα

1.1. Εισαγωγικά

Εκείνο που κάνει τον άνθρωπο να ξεχωρίζει από τα πρώτα κιάλια βήματα της εξέλιξής του είναι η διαρκής και συνειδητή προσπάθειά του για δημιουργία, για όλο και περισσότερες πνευματικές κατακτήσεις. Επινόει λεκτικά σύμβολα για να συνεννοείται με τα άλλα μέλη της κοινωνικής ομάδας, προσπαθεί να βρει τρόπους για να αποφύγει τους κινδύνους που αντιλαμβάνεται ότι τον απειλούν και αποκτά βαθμιαία μια στοιχειώδη αντίληψη για τη μορφή, το μέγεθος και το σχήμα. Η ανάγκη της επιβίωσης τον εξαναγκάζει να βρίσκεται σε διαρκή αγώνα. Επινόει όπλα και εργαλεία, τα οποία χρησιμοποιεί για την άμυνά του και για το κυνήγι της τροφής του. Τα θηράματα που πιάνει, τα δέρματα που χρησιμοποιεί, τα σπήλαια στα οποία καταφεύγει και γενικά η συντελής πάλι του με τη φύση, τον κάνουν να αντιληφθεί συνειδητά τις σχέσεις που υπάρχουν ανάμεσα στους αριθμούς και το χώρο.

Όταν οι άνθρωποι από κυνηγοί έγιναν παραγωγοί της τροφής τους και άρχισαν να αναπτύσσουν διάφορες συναλλαγές, ένα είδος εμπορίου, τότε έγινε αντιληπτή η άμεση ανάγκη της χρησιμοποίησης του αριθμού, η επέκταση της έννοιάς του, καθώς και η ανάγκη καθορισμού συγκεκριμένων σχέσεων μεταξύ των αριθμών. Έδεναν τα πράγματα δυο-δυο ή τρία-τρία και τα μετρούσαν ανά δυο ή ανά τρία. Επίσης μετρούσαν ανά τέσσερα, πέντε, έξι ή δέκα. Έτσι δημιουργήθηκαν τα πρώτα συστήματα αρίθμησης (δυαδικό, τριαδικό, τετραδικό, πενταδικό, εξαδικό και δεκαδικό).

Όσο αναπτύσσονταν οι κοινωνικές ομάδες, τόσο πιο πολλές ανάγκες και προβλήματα παρουσιάζονταν καθημερινά. Σε μερικές μάλιστα περιοχές τα προβλήματα ήταν πιο έντονα και η λύση τους πιο επιτακτική. Γύρω από το Νείλο, για παράδειγμα, ο

χώρος μεταβαλλόταν από τις πλημμύρες σ' έναν απέραντο λασπότοπο. Υπήρχε επομένως άμεση ανάγκη να βρεθεί τρόπος μέτρησης της Γης, ώστε να καθοριστούν ξανά τα σύνορα των αγρών. Επίσης υπήρχε ανάγκη κατασκευής αρδευτικών έργων, για να μπορούν να ελεγχθούν οι πλημμύρες, και η Γη, από λασπότοπος να μεταβληθεί σε πλούσιο παράδεισο. Παρόμοια προβλήματα αντιμετώπιζαν και οι Βαβυλώνιοι γύρω από τον Τίγρη και τον Ευφράτη ποταμό, καθώς και οι λαοί που κατοικούσαν στη Νότια και Κεντρική Ασία γύρω από τους ποταμούς Ινδός και Γάγγη. Γι' αυτό δεν είναι παράξενο το γεγονός ότι οι λαοί αυτοί είναι από τους πρώτους που έδωσαν ώθηση στην ανάπτυξη των Μαθηματικών.

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι εκτός από την πρωτόγονη μέτρηση, οι ρίζες της μαθηματικής επιστήμης βρίσκονται σε μερικές αναπτυγμένες κοινωνίες της Ανατολής της 5ης, 4ης και 3ης χιλιετίας, όπου τα Μαθηματικά αναπτύσσονται με σκοπό να βοηθήσουν το εμπόριο, τη γεωργία και τη μηχανική.

Εκείνο που σήμερα ονομάζουμε «λογική απόδειξη» δεν το συναντάμε στα Μαθηματικά πριν από την αρχαία ελληνική εποχή. Βέβαια οι αρχαίοι Αιγύπτιοι και οι Βαβυλώνιοι συντέλεσαν στην ανάπτυξη και πρόοδο της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας. Παρόλα αυτά δεν κατόρθωσαν να δώσουν ζωή σε καμιά μαθηματική θεωρία. Οι έρευνες που έκαναν είχαν σκοπό να εξυπηρετήσουν τις πρακτικές τους ανάγκες και όχι να αποκαταστήσουν αλήθειες θεωρητικού χαρακτήρα.

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί και φιλόσοφοι δεν περιορίστηκαν σε μια απλή συλλογή εμπειρικών συμπερασμάτων, αλλά προχώρησαν σε παραγωγικό συλλογισμό. Ο Θαλής και οι Πυθαγόρειοι ίδρυσαν την Αριθμητική και τη Γεωμετρία ως θεωρητικές επιστήμες τέλεια αποδεικτικές. Αργότερα άλλοι σπουδαίοι μαθηματικοί και φιλόσοφοι συντέλεσαν στην ανάπτυξη καθαρής μαθηματικής επιστήμης. Ιδρύθηκε η Ακαδημία από τον Πλάτωνα (428-347 π.Χ.), το Λύκειο από τον Αριστοτέλη (384-322 π.Χ.) και η σχολή του Κνίδιου Ευδόξου στην Κύζικο. Οι σχολές αυτές συντέλεσαν στην ανάπτυξη και προώθηση των μαθηματικών.

Γύρω στο 300 π.Χ. γράφονται τα στοιχεία του Ευκλείδη (330-250 π.Χ.) που είναι έργο-σταθμός στην ιστορία των Μαθηματικών. Κατά την εποχή μεταξύ Θαλή και Ευκλείδη, δηλαδή από το 600 π.Χ. μέχρι το 300 π.Χ., αναπτύχθηκε η θεωρητική μορφή των Μαθηματικών και η αποδεικτική μέθοδος, η οποία αποτελεί σημαντικότατη συμβολή των αρχαίων Ελλήνων προς τη μαθηματική επιστήμη.

Από την εποχή αυτή αρχίζουν να διατυπώνονται και να αναπτύσσονται διάφορες μαθηματικές θεωρίες. Η μαθηματική επιστήμη εξελίσσεται αλματωδώς. Σε κάθε φάση της εξέλιξής της παρουσιάζονται μεγάλα πνεύματα που κάνουν καταπληκτικές παρατηρήσεις και ανακαλύψεις. Διατυπώνουν, αναπτύσσουν νέες Μαθηματικές Θεωρίες και θέτουν τις βάσεις για ένα νέο ξεκίνημα και για νέες δημιουργικές προσπάθειες.

Οι επιστήμονες που ακολουθούν, μελετούν τις θεωρίες αυτές, τις ταξινομούν, τις συμπληρώνουν, τις βελτιώνουν και διατυπώνουν αναπόδεικτες προτάσεις, τα αξιώματα που τις χαρακτηρίζουν.

Είναι βέβαια γεγονός ότι στην πορεία της Μαθηματικής Επιστήμης παρουσιάστη-

καν και περιπτώσεις κατά τις οποίες πολλές από τις θεωρίες αυτές αποδείχτηκαν λανθασμένες, άλλες ελλειπείς και μερικές απλώς αφελείς σκέψεις. Παρόλα αυτά πιστεύουμε ότι η προσφορά και αυτών των θεωριών ήταν σημαντική, ακόμα και στην τελευταία περίπτωση, γιατί η καθεμιά αποτέλεσε το έναυσμα για προβληματισμό, έρευνα και νέες δημιουργικές ιδέες.

Τα αξιώματα που χαρακτηρίζουν μια Μαθηματική θεωρία είναι βέβαια προτάσεις αναπόδεικτες, ωστόσο δεν καθορίζονται αυθαίρετα, αλλά στηρίζονται στις **αρχικές έννοιες** και αποτελούν συνέπεια των ορισμών και των διαδικασιών που έχουν προηγηθεί¹.

Πολλές φορές, σε διάφορες Μαθηματικές Θεωρίες, χρησιμοποιήθηκαν αρχικές έννοιες, οι οποίες με τη διαίσθηση φαίνονταν χωρίς αμφιβολία αληθινές και επομένως τα αξιώματα που στηρίζονται σ' αυτές δεν έπρεπε να παρουσιάζουν αντιφάσεις. Όμως, όλοι γνωρίζουμε ότι σε αρκετές περιοχές της μαθηματικής έρευνας παρουσιάστηκαν κατά το παρελθόν σοβαρές αντιφάσεις, παρόλο που οι αρχικές έννοιες με τη διαίσθηση φαίνονταν ξεκάθαρες. Τέτοιες αντιφάσεις παρουσιάστηκαν στην Ευκλείδεια Γεωμετρία, με τα παράδοξα του Ζήνωνα, στη θεωρία συνόλων και σε άλλες μαθηματικές θεωρίες.

Οι αντιφάσεις αυτές απαιτούν:

- Επιστροφή στις αρχικές έννοιες για τις απαραίτητες διευκρινίσεις, τροποποιήσεις, βελτιώσεις.
- Περιορισμό στην αυθαίρετη χρήση της διαίσθησης.
- Έλεγχο ορισμών και προτάσεων που προηγήθηκαν.
- Αξιωματική θεμελίωση, τέλος, των θεωριών αυτών.

Θα αναφερθούμε σε δυο παραδείγματα θεωριών — ένα από τη Γεωμετρία και ένα από τη θεωρία συνόλων — που βασίστηκαν στη διαίσθηση και παρουσίασαν αντιφάσεις, πράγμα που οδήγησε σε προσεκτικότερη μελέτη τους, σε αναθεώρησή τους και στην αξιωματική τους θεμελίωση.

(α) Από τη Γεωμετρία

Στο ξεκίνημά της, δηλαδή στην εποχή του Θαλή και των Πυθαγορείων, η Ελληνική Γεωμετρία είχε βασιστεί στις έννοιες του σημείου και της γραμμής, έννοιες που στηρίζονταν καθαρά στη διαίσθηση χωρίς να έχουν αυστηρά προσδιοριστεί. Η χρήση της διαίσθησης απλωνόταν χωρίς περιορισμό και σε ένα μεγάλο πλήθος άλλων γεωμετρικών εννοιών. Αυτή ακριβώς η χωρίς περιορισμούς χρήση της διαίσθησης επέτρεψε στο Ζήνωνα να διατυπώσει διάφορες αντιφάσεις, που είναι γνωστές ως «τα παράδοξα του Ζήνωνα».

Ο Ζήνων ήταν μαθητής του Παρμενίδη, ο οποίος πίστευε στην «ολότητα», ότι δηλαδή κάθε πράγμα είναι ένα όλο που δεν μπορεί να διαιρεθεί σε άλλα μικρότερα.

1. Τα αξιώματα του Ρεανο για τους φυσικούς αριθμούς, όπως θα δούμε παρακάτω, είναι συνέπεια των αρχικών εννοιών, των ορισμών και των άλλων σχέσεων και προτάσεων που τέθηκαν και αποδείχτηκαν πριν από τον ορισμό του φυσικού συνόλου.

Πιστός οπαδός και θαυμαστής του δασκάλου του, ο Ζήνων προσπάθησε να αντικρούσει τους Πυθαγόρειους, οι οποίοι πίστευαν στην «πολλαπλότητα», δηλ. στη διαιρετότητα των αντικειμένων. Αν λοιπόν τα πράγματα, λέει ο Ζήνωνας, έχουν πολλαπλότητα και μπορούν να διαιρεθούν, θα φτάσουμε σε κάποιο σημείο, που θα συμβαίνει ένα από τα δυο: Ή τα αντικείμενα που προέκυψαν από τη διαίρεση δεν έχουν μέγεθος, οπότε και το αρχικό αντικείμενο δεν είχε μέγεθος. Ή έχουν μέγεθος, οπότε μπορούν να διαιρεθούν ξανά άπειρες φορές και να προκύψουν πάλι αντικείμενα με μέγεθος, οπότε το αρχικό αντικείμενο θα είναι πολύ μεγάλο, αφού αποτελείται από άπειρα μεγέθη. Δηλαδή κατά το Ζήωνα η πολλαπλότητα των Πυθαγορείων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όλα τα πράγματα είναι ή μικρά τόσο που να μην έχουν μέγεθος, ή τόσο μεγάλα, που να είναι άπειρα στο μέγεθος.

Με βάση τους συλλογισμούς αυτούς ο Ζήνων διατύπωσε τα παρακάτω τρία παράδοξα:

(i) Το παράδοξο της διχοτομίας. Είναι αδύνατο, υποστηρίζει ο Ζήνων, να διατρέξει κάποιος μια απόσταση οσοδήποτε μικρή, σε πεπερασμένο χρόνο. Αν π.χ. ο Α θέλει να διανύσει μια απόσταση x , τότε θα διανύσει πρώτα το μισό της απόστασης, στη συνέχεια το μισό του υπολοίπου κ.ο.κ. Επειδή όμως — κατά το Θαλή και τους Πυθαγόρειους — η διαίρεση θα συνεχίζεται «επ' άπειρο», ο Α δε θα διανύσει ποτέ την απόσταση x .

(ii) Το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας. Μια χελώνα και ο Αχιλλέας, που βρίσκεται σε μια απόσταση x πίσω της, κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Κατά το Ζήωνα, ο Αχιλλέας δε θα φτάσει ποτέ τη χελώνα με όση ταχύτητα κι αν τρέξει. Ο λόγος είναι ότι όταν ο Αχιλλέας φτάσει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε η χελώνα, αυτή θα έχει προχωρήσει κάποια απόσταση. Όταν ο Αχιλλέας φτάσει στη νέα θέση που είχε η χελώνα, αυτή θα έχει πάλι προχωρήσει κάποια απόσταση κ.ο.κ. «επ' άπειρο». Έτσι ο Αχιλλέας δε θα τη φτάσει ποτέ.

(iii) Το παράδοξο του βέλους.

Ένα βέλος κινείται και κάποια στιγμή βρίσκεται στη θέση Α. Την αμέσως επόμενη στιγμή βρίσκεται στη θέση Β, η οποία απέχει από το Α απόσταση x . Πριν όμως φτάσει το βέλος στη θέση Β έφτασε στο μέσον της απόστασης x , αφού προηγουμένως είχε φτάσει στο μέσον της απόστασης $\frac{1}{2}x$ κ.ο.κ. «επ' άπειρο». Επειδή όμως μιλάμε για την αμέσως επόμενη στιγμή, από τη στιγμή που το βέλος βρισκόταν στη θέση Α, έπεται ότι τα Α και Β συμπίπτουν. Επομένως το βέλος δεν κινείται.

Τα παράδοξα αυτά του Ζήωνα καθώς και μερικά άλλα παράδοξα που παρουσιάστηκαν, δημιούργησαν στους αρχαίους Έλληνες δυσκολίες που δεν τις υποψιάζονταν βασισμένοι στις διαισθητικές έννοιες του «σημείου» και της «γραμμής» που χρησιμοποιούσαν χωρίς περιορισμό. Ο Ευκλείδης περιόρισε τις δυσκολίες αυτές δημιουργώντας την πρώτη αξιωματική θεωρία για την Ελληνική Γεωμετρία. Κατέγραψε τις βασικές ιδιότητες του σημείου, της γραμμής και άλλων γεωμετρικών αντι-

κειμένων και δημιούργησε ένα σταθερό σύνολο αναπόδεικτων προτάσεων — τα αξιώματα ή αιτήματα — με τη βοήθεια των οποίων είναι δυνατόν να αποδειχτούν όλες οι άλλες ιδιότητες. Η διαίσθηση δεν παίζει κανένα παραπέρα ρόλο και η Γεωμετρία εξαρτάται αποκλειστικά από το σύνολο αυτών των αξιωμάτων. Μια πρόταση (θεώρημα, πρόβλημα κ.τ.λ.), θεωρείται ότι επιδέχεται απόδειξη μόνο όταν είναι δυνατόν να αποδειχτεί με τη βοήθεια των αξιωμάτων και με λογικούς συλλογισμούς και όχι με διάφορα διαισθητικά επιχειρήματα.

Η αξιωματική μέθοδος, όπως τη δημιούργησε ο Ευκλείδης, δεν ξέρουμε αν έδωσε ολοκληρωμένη απάντηση στα παράδοξα του Ζήνωνα, είναι όμως αναμφισβήτητο το ισχυρότερο μέσο για τη θεμελίωση και δόμηση της Γεωμετρίας. Μέχρι και τη σύγχρονη εποχή, οι περισσότεροι μελετητές θεωρούν την Ευκλείδεια Γεωμετρία ως τον κλάδο εκείνο που είναι θεμελιωμένος σε γερές και σωστές αξιωματικές βάσεις.

Αργότερα αναπτύχθηκαν ισχυρές αξιωματικές θεωρίες, όπως για παράδειγμα, η αξιωματική του Hilbert, αλλά η Ευκλείδεια Γεωμετρία όπως τη θεμελίωσε ο Ευκλείδης παραμένει ακόμα επίκαιρη.

(β) Από τη θεωρία συνόλων

Το σύνολο είναι μια απλή πρωταρχική έννοια. Μια έννοια τόσο απλή, που να μπορεί να εισαχτεί ακόμα και στην πρώτη τάξη του Δημοτικού Σχολείου.

Ακριβώς επειδή η έννοια του συνόλου είναι τόσο απλή και τόσο κοινή, ο ρόλος της ως βασικής θεμελιακής έννοιας στα Μαθηματικά δεν είχε γίνει κατανοητός για πολλές εκατονταετίες.

Η πρώτη μαθηματική έννοια του συνόλου δόθηκε από τον G. Cantor² γύρω στα 1880. Κατά τον Cantor «Σύνολο είναι κάθε συλλογή από αντικείμενα που παίρνονται από τον κόσμο της σκέψης, είτε από τον κόσμο της εμπειρίας μας, τα οποία είναι ξεκάθαρα ορισμένα και διακεκριμένα μεταξύ τους και θεωρούνται συγκεντρωμένα σε μια ολότητα».

Ο καθορισμός αυτός της έννοιας του συνόλου δεν αποτελεί αυστηρό μαθηματικό ορισμό — όπως έλεγε και ο ίδιος ο Cantor — αλλά είναι μια απλή σύλληψη της έννοιας του τι περίπου είναι σύνολο με ελεύθερη χρήση της διαίσθησης.

Η θεωρία συνόλων που αναπτύχθηκε με βάση τη θεωρία του Cantor, η οποία στηριζόταν στην ελεύθερη χρήση της διαίσθησης για το τι είναι σύνολο, είναι γνωστή ως *ενορατική θεωρία συνόλων*. Όμως η ελεύθερη χρήση της διαίσθησης οδήγησε τη θεωρία αυτή σε διάφορες λογικές αντινομίες³.

2. Ο G. Cantor γεννήθηκε το 1845 στην Πετρούπολη και τις εγκύκλιες σπουδές του τελείωσε στη Φραγκφούρτη. Σπούδασε Μαθηματικά στα πανεπιστήμια του Βερολίνου και της Γοττίγγης από το 1863 μέχρι το 1867. Το 1867 έγινε διδάκτορας του πανεπιστημίου του Βερολίνου και το 1869 υφηγητής του Πανεπιστημίου του Halle. Το 1872 έγινε έκτακτος και το 1879 τακτικός καθηγητής του Πανεπιστημίου του Halle. Πέθανε το 1918.

Κατά τον Cantor «η ουσία των Μαθηματικών είναι η ελευθερία τους».

3. Λογική αντινομία μέσα σ' ένα σύστημα αξιωμάτων ονομάζεται μια πρόταση για τη οποία, αν δεχτούμε την αλήθειά της, τότε με τη βοήθεια των αξιωμάτων του συστήματος συμπεραίνουμε ότι ισχύει η

Μέχρι το 1902 μια ιδιότητα, έστω φ , ήταν αρκετή για την περιγραφή ενός συνόλου. Ίσχυε δηλαδή, η σχέση x έχει την ιδιότητα φ , αν και μόνο αν

$$x \in \{y/y \text{ έχει την ιδιότητα } \varphi\}.$$

Π.χ. ο αριθμός a είναι άρτιος, αν και μόνο αν ανήκει στο σύνολο $\{x/x \text{ άρτιος}\}$.

Έτσι για την ιδιότητα φ ισχύει η ισοδυναμία

$$\varphi(x) \Leftrightarrow x \in \{x/\varphi(x)\} \quad (1)$$

που ήταν γνωστή ως αξίωμα του Church.

Ο B. Russell απέδειξε ότι μια ιδιότητα μόνο δεν είναι πάντοτε ικανή να περιγράψει ένα σύνολο. Σε ένα γράμμα του προς τον Gottlob Frege το 1902 ο B. Russell έγραφε:

Υπάρχουν δυο κατηγορίες συνόλων. Τα σύνολα που έχουν την ιδιότητα ότι και τα ίδια ανήκουν στην ιδιότητα του ορισμού τους, δηλαδή τα σύνολα που έχουν ως στοιχείο τον εαυτό τους και τα σύνολα που δεν έχουν ως στοιχείο τον εαυτό τους. Τα πρώτα τα ονομάζουμε R-σύνολα και τα δεύτερα OXI-R-σύνολα. Τα σύνολα αυτά δεν είναι κενά. Π.χ. «το σύνολο όλων των αντικειμένων που περιγράφονται με 12 ακριβώς ελληνικές λέξεις» έχει την ιδιότητα του ορισμού του, γιατί και αυτό περιγράφεται με 12 ακριβώς ελληνικές λέξεις και είναι επομένως ένα R-σύνολο. Το σύνολο όλων των κατοίκων της Γης είναι ένα OXI-R-σύνολο.

Ας ονομάσουμε M το σύνολο όλων των OXI-R-συνόλων. Τότε το M πρέπει να είναι ή ένα R-σύνολο ή ένα OXI-R-σύνολο.

Έστω ότι το M είναι ένα R-σύνολο. Τότε θα περιέχει ως στοιχείο τον εαυτό του. Επειδή το M περιέχει OXI-R-σύνολα, έπεται ότι το M θα είναι και αυτό ένα OXI-R-σύνολο.

Έστω ότι το M είναι ένα OXI-R-σύνολο τότε το M περιέχει τον εαυτό του και επομένως το M είναι R-σύνολο.

Έτσι ο Russell απέδειξε τη λογική αντινομία:

$$\text{Το } M \text{ είναι R-σύνολο} \Leftrightarrow \text{το } M \text{ είναι OXI-R-σύνολο.}$$

Η αντινομία αυτή, που είναι γνωστή ως αντινομία του Russell, με τη χρησιμοποίηση του αξιώματος του Church εκφράζεται ως εξής:

Έστω M το σύνολο όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους. Δηλαδή

$$M = \{x/x \notin x\}$$

Με τη χρησιμοποίηση της ισοδυναμίας (1) έχουμε:

$$x \notin x \Leftrightarrow x \in \{x/x \notin x\}$$

Η σχέση αυτή για το σύνολο M δίνει:

$$M \notin M \Leftrightarrow M \in M$$

Με αφορμή την αντινομία του Russell και διάφορες άλλες αντινομίες (παράδοξο του Cantor κ.τ.λ.) που παρουσιάστηκαν στην ενορατική θεωρία συνόλων, έγινε

άρνησή της, ενώ αν δεχτούμε ότι η πρόταση είναι ψευδής, τότε με τη βοήθεια των αξιωμάτων του συστήματος συμπερινοίμε ότι η πρόταση είναι αληθής. Δηλαδή αν P είναι μια πρόταση μέσα στο θεωρούμενο σύστημα και \bar{P} είναι η άρνηση της P , τότε η λογική αντινομία εκφράζεται με την ισοδυναμία

$$P \Leftrightarrow \bar{P}$$

αναθεώρηση της θεωρίας αυτής, τροποποιήθηκαν διάφορες έννοιες και ισοδυναμίες και τελικά η θεωρία οδηγήθηκε στην αξιωματική θεμελίωσή της.

Από τους πρώτους που εργάστηκαν για τη δημιουργία της αξιωματικής θεωρίας συνόλων ήταν ο Ernst Zermelo⁴, ο οποίος έβαλε τις βάσεις για την αξιωματική θεμελίωση της θεωρίας αυτής γύρω στα 1908.

Προς την ίδια κατεύθυνση εργάστηκε λίγο αργότερα και ο Abraham Fraenkel.

Ο Zermelo και ο Fraenkel διατύπωσαν μια θεωρία, η οποία βασίζεται σε ένα σταθερό και ολοκληρωμένο σύνολο αξιωμάτων. Όλες οι σχετικές προτάσεις αποδεικνύονται με βάση αυτό το σταθερό σύνολο αξιωμάτων και η διαίσθηση δεν παίζει πλέον κανένα παραπέρα τυπικό ρόλο.

Η αξιωματική θεωρία, όπως διαμορφώθηκε από τους Zermelo και Fraenkel ονομάζεται Κανονική θεωρία συνόλων.

1.2. Η έννοια του Αριθμητικού συστήματος

Ας υποθέσουμε ότι A είναι ένα σύνολο αντικειμένων, μέσα στο οποίο έχει αναπτυχθεί μια Μαθηματική Θεωρία. Αν η θεωρία αυτή στηρίζεται σε ένα σταθερό και ολοκληρωμένο σύνολο αξιωμάτων και κάθε πρόταση (θεώρημα, πρόβλημα κ.τ.λ.) θεωρείται αποδεικτέα μέσα στο A , αν μπορεί να αποδειχτεί με τη βοήθεια αυτών των αξιωμάτων και μόνο, τότε λέμε ότι το σύνολο A έχει Μαθηματική δομή. Αν το A είναι εφοδιασμένο και με ένα μη κενό σύνολο πράξεων οι οποίες ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες, τότε θα λέμε ότι το A είναι ένα Μαθηματικό Σύστημα. Δηλαδή, με τον όρο Μαθηματικό Σύστημα εννοούμε το σύνολο A , τις πράξεις που ορίζονται στο A με τις ιδιότητες που ικανοποιούν οι πράξεις αυτές, καθώς και το σύνολο των αξιωμάτων που χαρακτηρίζουν το A .

Τα αξιώματα ενός Μαθηματικού Συστήματος δεν είναι υποχρεωτικά ανεξάρτητα μεταξύ τους. Όμως η πιθανή εξάρτηση αξιωμάτων του ίδιου Συστήματος, καθώς και η αδυναμία επίλυσης συγκεκριμένων προβλημάτων με όρους του ίδιου Συστήματος, δεν αναιρούν τις ιδιότητες του Συστήματος.

Όπως είπαμε και παραπάνω, σε κάθε Μαθηματικό Σύστημα τα αξιώματα που το χαρακτηρίζουν δεν καθορίζονται αυθαίρετα, αλλά στηρίζονται στις αρχικές έννοιες

4. Ο Zermelo τροποποίησε το αξίωμα του Church (ισοδυναμία (I)) με τον ακόλουθο τρόπο:

Για να ανήκει ένα αντικείμενο σε ένα σύνολο, λέει ο Zermelo, δεν αρκεί να ικανοποιεί μια συγκεκριμένη ιδιότητα, αλλά πρέπει να μπορεί να ανήκει κάπου, δηλαδή να μπορεί να είναι στοιχείο κάποιου συνόλου. Τα στοιχεία αυτά τα ονόμασε ταξινομήσιμα. Δηλαδή

$$x \text{ ταξινομήσιμο} \Leftrightarrow \exists \psi : x \in \psi.$$

Με βάση τον ορισμό αυτό η ισοδυναμία (I) παίρνει τη μορφή

$$\varphi(x) \text{ και } x \text{ ταξινομήσιμο} \Leftrightarrow x \in \{x / \varphi(x)\}$$

Με την τροποποίηση αυτή, η αντινομία του Russell δεν υπάρχει, γιατί το σύνολο M όλων των OXI-R-συνόλων δεν είναι ταξινομήσιμο.

και είναι συνέπεια των ορισμών και των διαδικασιών που έχουν προηγηθεί του καθορισμού τους. Κάθε αξίωμα, οποιουδήποτε Μαθηματικού Συστήματος, πρέπει να έχει τα εξής τουλάχιστον χαρακτηριστικά:

- (i) Να είναι συνεπές. Δηλαδή να μην είναι αντιφατικό με τον εαυτό του.
- (ii) Να έχει καθολικότητα. Δηλαδή να εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο όχι μόνο μέσα στο ίδιο Μαθηματικό Σύστημα, αλλά και σε ευρύτερα Συστήματα, καθώς και σε άλλες περιοχές της επιστήμης.
- (iii) Να είναι συμβιβαστό με τα άλλα αξιώματα του Συστήματος. Δηλαδή να μην οδηγεί σε αντιφάσεις και αναιρεί άλλα αξιώματα του Συστήματος.

Ένα Μαθηματικό Σύστημα A , στο οποίο τα στοιχεία του συνόλου A είναι αριθμοί, το λέμε **Αριθμητικό Σύστημα**⁵.

Από τα πιο γνωστά Αριθμητικά Συστήματα είναι τα Συστήματα

$$N, Z, Q, R \quad (2)$$

των Φυσικών, των Ακεραίων, των Ρητών και των Πραγματικών αριθμών αντίστοιχα. Καθένα από τα Συστήματα αυτά μπορεί να παρουσιαστεί με δυο τρόπους, αξιωματικά ή κατασκευαστικά:

— Αξιωματικά:

Για καθένα από τα σύνολα (2) δεχόμαστε αξιωματικά την ύπαρξή του, καθώς και ένα σταθερό σύνολο αξιωμάτων που το χαρακτηρίζουν. Στη συνέχεια ορίζουμε τις πράξεις που ισχύουν στο σύνολο αυτό και τις ιδιότητες που ικανοποιούν οι πράξεις αυτές.

— Κατασκευαστικά:

Δεχόμαστε αξιωματικά την ύπαρξη του συνόλου N των Φυσικών αριθμών και καθορίζουμε τα αξιώματα που το χαρακτηρίζουν. Με βάση τα αξιώματα αυτά αποδεικνύουμε όλες τις ιδιότητες των πράξεων που ορίζονται στο N . Στη συνέχεια, με τη βοήθεια του N κατασκευάζουμε το σύνολο Z των Ακεραίων ως επέκταση⁶ του N . Κατασκευάζουμε έπειτα το σύνολο Q των Ρητών αριθμών ως επέκταση του Z και τέλος κατασκευάζουμε το σύνολο R των πραγματικών αριθμών ως επέκταση του Q .

Η κατασκευή των συνόλων Z , Q και R ως επεκτάσεις των συνόλων N , Z και Q αντίστοιχα έχει πολλά πλεονεκτήματα σε σύγκριση με την αξιωματική παρουσίαση των συνόλων αυτών. Από τον τρόπο και μέσα από τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου Z , για παράδειγμα, μπορούμε να δώσουμε απάντηση σε ερωτήματα όπως τα παρακάτω, πολλά από τα οποία θα έμεναν αναπάντητα, αν ακολουθούσαμε την αξιωματική παρουσίαση:

— Τι είναι ακέραιος αριθμός. Δηλαδή ποια είναι η φύση των στοιχείων του Z . Είναι ο ακέραιος θετικός ίδιος με τον αντίστοιχό του φυσικό αριθμό. Π.χ. είναι $0 + 3$ ίδιος με το φυσικό αριθμό 3;

5. Τα Αριθμητικά Συστήματα δεν πρέπει να συγχέονται με τα συστήματα αρίθμησης, που είναι το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, το δυαδικό, το τριαδικό, το πενταδικό κ.τ.λ.

6. Με τον όρο επέκταση ενός Συστήματος A εννοούμε την κατασκευή ενός νέου Συστήματος B , που θα έχει ένα υποσύνολο ισόμορφο με το Σύστημα A .

- Τι είναι θετικός και τι αρνητικός αριθμός.
- Τι είναι μηδενικός αριθμός ως στοιχείο του \mathbb{Z} .
- Γιατί ο αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το θετικό και από το μηδενικό αριθμό.
- Γιατί ο θετικός είναι μεγαλύτερος από το μηδενικό αριθμό.
- Γιατί το γινόμενο δυο αρνητικών ή δυο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός.
- Γιατί το γινόμενο θετικού με αρνητικό αριθμό είναι αρνητικός αριθμός κ.τ.λ.

Ένα άλλο πλεονέκτημα της κατασκευαστικής παρουσίασης των συνόλων \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} είναι το γεγονός ότι η κατασκευή των συνόλων αυτών έγινε για να εξυπηρετήσει συγκεκριμένες ανάγκες και δεν έγινε αυθαίρετα και τυχαία. Ο K. Cödel το 1931 απέδειξε ότι με δεδομένο ένα οποιοδήποτε σταθερό σύνολο αριθμητικών αξιωμάτων, υπάρχουν αληθινές προτάσεις της Αριθμητικής που δεν μπορούν να αποδειχτούν μέσα στο σύνολο αυτό. Υπάρχουν δηλαδή αριθμητικά προβλήματα που είναι καταδικασμένα να μείνουν άλυτα σε σχέση με οποιοδήποτε σταθερό σύνολο αξιωμάτων.

Σύμφωνα με την απόδειξη αυτή του Cödel, θα υπάρχουν προβλήματα που είναι αδύνατο να λυθούν μέσα σε κάποιο από τα Αριθμητικά Συστήματα \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} και \mathbb{R} . Η αδυναμία επίλυσης προβλημάτων με όρους του ίδιου συστήματος, οδήγησε στην επέκτασή του και στην κατασκευή νέου Συστήματος, μέσα στο οποίο τα συγκεκριμένα προβλήματα μπορούν να επιλυθούν. Π.χ. η αδυναμία επίλυσης της εξίσωσης

$$a + x = \beta, \quad \text{με } a > \beta,$$

μέσα στο σύνολο \mathbb{N} των Φυσικών αριθμών, είναι ένα από τα προβλήματα που οδήγησαν στην κατασκευή του συνόλου \mathbb{Z} των ακεραίων. Στο \mathbb{Z} η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί. Επίσης, η αδυναμία επίλυσης της εξίσωσης $ax = \beta$, με a όχι διαιρέτη του β , μέσα στο σύνολο \mathbb{Z} των ακεραίων είναι ένα από τα προβλήματα που οδήγησαν στην κατασκευή του συνόλου \mathbb{Q} των ρητών. Τέλος, η αδυναμία επίλυσης της εξίσωσης $x^2 - a = 0$ με a θετικό αριθμό και όχι τετράγωνο ρητού, μέσα στο σύνολο \mathbb{Q} είναι ένα από τα προβλήματα που οδήγησαν στην κατασκευή του συνόλου \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών.

* * *

Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιάσουμε τα Συστήματα \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} και \mathbb{R} ακολουθώντας την κατασκευαστική διαδικασία.

Θα εξετάσουμε πρώτα πώς έγινε η αξιωματική θεμελίωση του συνόλου \mathbb{N} των φυσικών αριθμών και πώς με βάση τα αξιώματα αυτά αποδείξαμε τις ιδιότητες των πράξεων που ορίζονται στο \mathbb{N} .

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε το σύνολο \mathbb{Z} των ακεραίων και θα δείξουμε ότι το \mathbb{Z} είναι μια επέκταση του \mathbb{N} .

Έπειτα θα κατασκευάσουμε το σύνολο \mathbb{Q} των ρητών και θα δείξουμε ότι το \mathbb{Q} είναι επέκταση του \mathbb{Z} .

Τέλος θα κατασκευάσουμε το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών και θα δείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι μια επέκταση του \mathbb{Q} .

2. Το σύνολο \mathbb{N} των Φυσικών αριθμών

2.1. Το σύνολο \mathbb{N}

Έστω ότι A είναι ένα μη κενό σύνολο και φ μια διμελής σχέση στο A . Αν η σχέση φ είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική, τότε λέγεται σχέση διάταξης στο A και το σύνολο A λέγεται διατεταγμένο σύνολο ως προς τη σχέση φ .

Αν φ είναι μια σχέση διάταξης στο A ($A \neq \emptyset$) και $\varphi: a \rightarrow b$, τότε λέμε ότι τα στοιχεία a, b του A είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους ως προς τη σχέση φ και γράφουμε $a\varphi b$.

Αν τα στοιχεία κάθε ζεύγους του A είναι συγκρίσιμα ως προς τη σχέση φ , τότε η φ λέγεται ολική διάταξη στο A και το A λέγεται ολικά διατεταγμένο σύνολο ως προς τη φ . Π.χ. η σχέση « \leq » είναι ολική διάταξη στο σύνολο \mathbb{N} των φυσικών αριθμών και το \mathbb{N} είναι ολικά διατεταγμένο ως προς τη σχέση αυτή.

Αν τα στοιχεία έστω και ενός ζεύγους a, b του A δεν είναι συγκρίσιμα ως προς τη φ , τότε η φ λέγεται μερική διάταξη στο A και το A λέγεται μερικά διατεταγμένο ως προς τη φ . Π.χ. η σχέση που εκφράζεται με την πρόταση «ο a είναι διαιρέτης του b με a, b φυσικούς», είναι μερική διάταξη στο \mathbb{N} και το \mathbb{N} είναι μερικά διατεταγμένο ως προς τη σχέση αυτή.

Ένα διατεταγμένο σύνολο A μπορεί να επαληθεύει και μερικές άλλες συνθήκες, οι οποίες παίζουν σημαντικό ρόλο στη θεμελίωση των Μαθηματικών. Τέτοιες συνθήκες είναι και η συνθήκη της επαγωγής και η συνθήκη του ελάχιστου στοιχείου.

I. Συνθήκη της επαγωγής

Αν A είναι ένα μη κενό ολικά διατεταγμένο σύνολο με ελάχιστο στοιχείο⁷ και
(i) το ελάχιστο στοιχείο του A ικανοποιεί μια ιδιότητα P και
(ii) το τυχαίο στοιχείο του A ικανοποιεί την P όταν όλα τα αυστηρώς προηγούμενά του στοιχεία ικανοποιούν την P , τότε κάθε στοιχείο του A ικανοποιεί την P .

II. Συνθήκη του ελάχιστου στοιχείου

Αν A είναι ένα μη κενό ολικά διατεταγμένο σύνολο, τότε λέμε ότι το A ικανοποιεί τη συνθήκη του ελάχιστου στοιχείου, αν κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ελάχιστο στοιχείο.

Πρόταση 2.1

Η συνθήκη της επαγωγής και η συνθήκη του ελάχιστου στοιχείου είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη:

Έστω ότι το A ικανοποιεί τη συνθήκη της επαγωγής. Αν $B \subseteq A$ με $B \neq \emptyset$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ελάχιστο στοιχείο του A δεν ανήκει στο B , διαφορετικά το B έχει ελάχιστο που συμπίπτει με το ελάχιστο στοιχείο του A .

Θεωρούμε το σύνολο

7. Ένα στοιχείο x λέγεται ελάχιστο στοιχείο του συνόλου A , αν και μόνο αν $x \in A$ και $x \leq a \forall a \in A$.

$$\Gamma = \{x \in A \mid x < \beta, \forall \beta \in B\}.$$

Τότε $\Gamma \neq \emptyset$, γιατί το ελάχιστο στοιχείο του A ανήκει στο Γ .

Επειδή $B \neq \emptyset$ θα είναι $\Gamma \neq A$.

Θα υπάρξει επομένως κάποιο στοιχείο

$$\omega \in A \text{ με } \omega \notin \Gamma,$$

ενώ όλα τα αυστηρώς προηγούμενα στοιχεία του ω θα είναι στοιχεία του Γ .

$$\text{Τότε } \omega \leq \beta \forall \beta \in B.$$

Αν $\omega < \beta \forall \beta \in B$, τότε $\omega \in \Gamma$, που είναι άτοπο.

$$\text{Άρα } \omega \in B \text{ και } \omega \leq \beta \forall \beta \in B.$$

Επομένως, το σύνολο B έχει ελάχιστο στοιχείο το ω .

Έστω τώρα ότι το A ικανοποιεί τη συνθήκη του ελάχιστου στοιχείου και $P(v)$ ένας προτασιακός τύπος που ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. $P(v_0)$ είναι πρόταση αληθής, όπου το v_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του A .
2. $P(u)$ είναι αληθής, όταν η $P(x)$ είναι αληθής για κάθε $x < u$ και $x, u \in A$.

Θα δείξουμε ότι η $P(v)$ είναι αληθής $\forall v \in A$.

Έστω $B = \{v \in A \mid \text{με } P(v) \text{ ψευδής}\}$.

Θα δείξουμε ότι $B = \emptyset$.

Έστω $B \neq \emptyset$. Τότε το B έχει ελάχιστο στοιχείο.

Αν β_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του B , τότε η $P(\beta_0)$ είναι πρόταση ψευδής,

ενώ η $P(\alpha)$ με $\alpha \in A$ και $\alpha < \beta_0$ είναι αληθής.

Αυτό όμως αντίκειται στην ιδιότητα 2.

Ορισμός

Ένα διατεταγμένο σύνολο A λέγεται καλά διατεταγμένο, όταν κάθε μη κενό υποσύνολό του έχει ένα πρώτο στοιχείο.

Οι παρακάτω προτάσεις είναι προφανείς:

— Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο A είναι και ολικά διατεταγμένο, γιατί με

$$\alpha, \beta \in A \text{ το σύνολο } \{\alpha, \beta\}$$

θα έχει ένα πρώτο στοιχείο και επομένως τα α, β είναι συγκρίσιμα στοιχεία για κάθε

$$\alpha, \beta \in A.$$

— Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο ικανοποιεί τη συνθήκη του ελάχιστου στοιχείου και τη συνθήκη της επαγωγής.

— Κάθε υποσύνολο ενός καλά διατεταγμένου συνόλου είναι καλά διατεταγμένο.

— Αν ένα καλά διατεταγμένο σύνολο δεν έχει τελευταίο στοιχείο, τότε κάθε στοιχείο του έχει ένα επόμενο.

— Το κενό σύνολο θεωρείται «εξ ορισμού» καλά διατεταγμένο.

Ορισμός

Ένα μη κενό, καλά διατεταγμένο σύνολο, χωρίς τελευταίο στοιχείο, του οποίου κάθε στοιχείο, εκτός από το πρώτο, έχει ένα προηγούμενο, ονομάζεται Φυσικό σύνολο.

Αν (A, \leq) και (B, \leq) είναι δυο Φυσικά σύνολα, τότε υπάρχει πάντοτε μια απεικόνιση

$$\varphi: A \rightarrow B,$$

η οποία είναι ένα προς ένα και επί και τέτοια, ώστε

$$\forall \alpha, \beta \in A \text{ να ισχύει}$$

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta)$$

Αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα A και B έχουν όμοια⁸ κατασκευή και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ταυτίζονται μέσω της απεικόνισης φ .

Επομένως, αν υπάρχουν Φυσικά σύνολα (A, \leq) και (B, \leq) αυτά θα είναι όμοια μεταξύ τους. Το ερώτημα βέβαια είναι αν υπάρχουν Φυσικά σύνολα.

Δεχόμαστε αξιωματικά ότι ένα τέτοιο σύνολο υπάρχει, το συμβολίζουμε με N και τα στοιχεία του τα ονομάζουμε φυσικούς αριθμούς.

Επειδή το N δεν έχει τελευταίο στοιχείο (από τον ορισμό του Φυσικού συνόλου), έπεται ότι κάθε στοιχείο του έχει ένα επόμενο. Αλλά και κάθε στοιχείο του N , εκτός από το πρώτο, έχει ένα προηγούμενο. Επομένως, αν συμβολίσουμε το πρώτο (ελάχιστο) στοιχείο του N με 0 , τότε κάθε στοιχείο n του N με $n \neq 0$ θα έχει ένα προηγούμενο και ένα επόμενο. Το 0 έχει μόνο επόμενο, που το συμβολίζουμε με 1 . Το επόμενο του 1 το συμβολίζουμε με 2 , το επόμενο του 2 με 3 κ.ο.κ. Γενικά το επόμενο του φυσικού αριθμού n το συμβολίζουμε με n^+ .

Έτσι έχουμε:

$$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \text{ με} \\ 0^+ = 1, \quad 1^+ = 2, \quad 2^+ = 3, \quad \text{κ.ο.κ.}$$

και $0 < 1 < 2 < 3 < \dots$

Η σχέση « $<$ » ονομάζεται σχέση αυστηρής καλής διάταξης στο N , ενώ η « \leq » ονομάζεται σχέση φυσικής διάταξης στο N .

Το σύνολο N ως φυσικό σύνολο ικανοποιεί τη συνθήκη του ελάχιστου στοιχείου. Επομένως ισχύει η πρόταση.

Πρόταση 2.2.

Κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου N των φυσικών αριθμών έχει ελάχιστο στοιχείο.

Από όλη την παραπάνω διαδικασία και ιδιαίτερα τον ορισμό του φυσικού συνόλου, συμπεραίνουμε ότι στο σύνολο N των φυσικών αριθμών ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα, που είναι γνωστά ως αξιώματα του Peano.

Αξιώματα του Peano.

A_1 : Το 0 είναι ο ελάχιστος φυσικός αριθμός στοιχείο του συνόλου N .

A_2 : Αν n είναι φυσικός αριθμός, τότε και ο n^+ είναι φυσικός και ονομάζεται επόμενος του n .

8. Δύο διατεταγμένα σύνολα A και B λέγονται όμοια μεταξύ τους, αν υπάρχει μια απεικόνιση

$$\varphi: A \rightarrow B,$$

η οποία είναι ένα προς ένα και επί και $\forall \alpha, \beta \in A$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \varphi(\alpha) \leq \varphi(\beta).$$

$$A_3: \mu^+ = v^+ \Leftrightarrow \mu = v, \forall \mu, v \in \mathbb{N}.$$

$$A_4: A \subseteq \mathbb{N} \text{ και } 0 \in A \text{ και } \forall v \in A \Rightarrow v^+ \in A, \text{ τότε } A = \mathbb{N}.$$

Το τελευταίο αξίωμα είναι γνωστό ως αξίωμα ή αρχή της τέλει επαγωγής. Το αξίωμα αυτό δεν είναι αυθαίρετο, αλλά είναι συνέπεια της πρότασης 2.1. Το σύνολο \mathbb{N} ικανοποιεί τη συνθήκη του ελάχιστου στοιχείου, άρα θα ικανοποιεί και τη συνθήκη της επαγωγής.

2.2. Η πρόσθεση στο \mathbb{N}

Στο σύνολο \mathbb{N} των φυσικών αριθμών ορίζουμε τις σχέσεις:

$$A_5: v + 0 = v \quad \forall v \in \mathbb{N} \text{ και}$$

$$A_6: v + \mu^+ = (v + \mu)^+, \quad \forall \mu, v \in \mathbb{N}.$$

Οι σχέσεις αυτές μαζί με τα αξιώματα του Peano κάνουν τη σχέση «+» εσωτερική πράξη στο \mathbb{N} και είναι η γνωστή πράξη της πρόσθεσης στο \mathbb{N} .

Θα δείξουμε όλες τις ιδιότητες που ικανοποιεί η πράξη + της πρόσθεσης στο \mathbb{N} με τη βοήθεια των αξιωμάτων A_1 μέχρι A_6 .

1. Προσεταιριστική

Για κάθε μ, v, κ στοιχεία του \mathbb{N} ισχύει η σχέση

$$(\mu + v) + \kappa = \mu + (v + \kappa)$$

Απόδειξη

Επειδή $0^+ = 1$ και $\mu + 0 = \mu$ (αξίωμα A_5), θα έχουμε:

$$\mu^+ = (\mu + 0)^+ = \mu + 0^+ = \mu + 1$$

Για $\kappa = 0$ έχουμε $(\mu + v) + 0 = \mu + v$ και $\mu + (v + 0) = \mu + v$. Άρα:

$$(\mu + v) + 0 = \mu + (v + 0)$$

Για $\kappa = 1$ έχουμε:

$$(\mu + v) + 1 = (\mu + v)^+ = \mu + v^+ = \mu + (v + 1).$$

Δεχόμαστε ότι $(\mu + v) + \kappa = \mu + (v + \kappa)$ και θα δείξουμε ότι:

$$(\mu + v) + (\kappa + 1) = \mu + [v + (\kappa + 1)]$$

Είναι:

$$(\mu + v) + (\kappa + 1) = (\mu + v) + \kappa^+ = [(\mu + v) + \kappa]^+ =$$

$$= [\mu + (v + \kappa)]^+ = \mu + (v + \kappa)^+ = \mu + [(v + \kappa) + 1] = \mu + [v + (\kappa + 1)]$$

Επομένως η πρόταση είναι αληθής $\forall \mu, v, \kappa \in \mathbb{N}$.

2. Αντιμεταθετική

Για κάθε $\mu, v \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$\mu + v = v + \mu$$

Απόδειξη

Έχουμε τον προτασιακό τύπο $P(\mu, v)$. Οι προτάσεις $P(0, 0)$ και $P(1, 1)$ είναι αληθείς. Δεχόμαστε ότι η $P(1, \kappa)$ είναι αληθής, δηλαδή

$$1 + \kappa = \kappa + 1 \quad \forall \kappa \in \mathbb{N}. \text{ Τότε:}$$

$$1 + (\kappa + 1) = (1 + \kappa)^+ = (\kappa + 1)^+ = (\kappa + 1) + 1$$

και η $P(1, \kappa + 1)$ είναι αληθής. Άρα η $P(1, v)$ είναι αληθής $\forall v \in \mathbb{N}$.

Δεχόμαστε ότι η $P(\lambda, v)$ είναι αληθής με $\lambda \in \mathbb{N}, \lambda < \mu$.

Δηλαδή δεχόμαστε ότι: $\lambda + v = v + \lambda$. Τότε:

$$v + (\lambda + 1) = (v + \lambda) + 1 = (\lambda + v) + 1 = \lambda + (v + 1) = \lambda + (1 + v) = (\lambda + 1) + v$$

και επομένως η $P(\mu, v)$ είναι αληθής $\forall \mu, v \in \mathbb{N}$.

3. Ιδιότητα του ουδέτερου στοιχείου

Για κάθε $v \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$v + 0 = 0 + v = v$$

Απόδειξη

Προκύπτει αμέσως από την προηγούμενη ιδιότητα και τη σχέση

$$v + 0 = v \quad \forall v \in \mathbb{N} \text{ (αξίωμα } A_5)$$

4. Ιδιότητα της διαγραφής

Για κάθε $\mu, v, x \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$\mu + x = v + x \Leftrightarrow \mu = v$$

Απόδειξη

Με $x = 0$ έχουμε $\mu + 0 = v + 0 \Leftrightarrow \mu = v$ ισχύει.

Με $x = 1$ έχουμε $\mu + 1 = v + 1 \Leftrightarrow \mu^+ = v^+ \stackrel{A_2}{\Leftrightarrow} \mu = v$

Δεχόμαστε ότι $\mu + \kappa = v + \kappa \Leftrightarrow \mu = v$. Τότε:

$$\mu + (\kappa + 1) = v + (\kappa + 1) \stackrel{A_6}{\Leftrightarrow} (\mu + \kappa)^+ = (v + \kappa)^+ \stackrel{A_2}{\Leftrightarrow} \mu + \kappa = v + \kappa \Leftrightarrow \mu = v.$$

Επομένως η πρόταση ισχύει $\forall \mu, v, x \in \mathbb{N}$.

5. Ιδιότητα της διάταξης

Για κάθε $\mu, v, \kappa \in \mathbb{N}$ ισχύουν οι σχέσεις:

(i) $\mu \leq \mu + \kappa$

(ii) $\mu = v + \kappa \Leftrightarrow v \leq \mu$

(iii) $\mu \leq v \Leftrightarrow \mu + \kappa \leq v + \kappa$ και

(iv) $\mu \leq v$ και $\lambda \leq \rho$ συνεπάγεται $\mu + \lambda \leq v + \rho$.

Απόδειξη

(i) Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της τέλει επαγωγής στο κ .

Με $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ έχουμε αντίστοιχα

$$\mu = \mu + 0 \text{ και } \mu < \mu^+ = \mu + 1$$

και η πρόταση είναι αληθής.

Δεχόμαστε ότι η πρόταση είναι αληθής με $\kappa = \lambda$. Δηλαδή δεχόμαστε ότι $\mu \leq \mu + \lambda$.

Τότε από τη σχέση

$$\mu + \lambda < (\mu + \lambda)^+ = (\mu + \lambda) + 1 = \mu + (\lambda + 1)$$

έχουμε

$$\mu \leq \mu + \lambda < \mu + (\lambda + 1)$$

και η πρόταση είναι αληθής με $\kappa = \lambda + 1$.

Άρα η πρόταση είναι αληθής για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω $\mu = \nu + \kappa$. Τότε η (i) δίνει $\nu \leq \nu + \kappa = \mu$.

Αντίστροφα. Έστω $\nu \leq \mu$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $\kappa \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\mu = \nu + \kappa$.

Με $\nu = 0$ είναι $0 \leq \mu$ και επειδή $\mu = 0 + \mu$, έπεται ότι η πρόταση ισχύει με $\kappa = \mu$.

Με $\nu = 1$ είναι $1 \leq \mu$. Επειδή $\mu = 1 + \mu^-$, όπου μ^- είναι ο αριθμός ο αμέσως προηγούμενος του μ , έπεται ότι η πρόταση ισχύει με $\nu = 1$ και το κ ισούται με μ^- . Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι ο μ^- (προηγούμενος του μ) υπάρχει, γιατί $\mu \geq 1$.

Δεχόμαστε ότι η πρόταση ισχύει με $\nu = \lambda$. Δηλαδή δεχόμαστε ότι

$$\lambda \leq \mu \Rightarrow \mu = \lambda + \kappa.$$

Έστω $\lambda + 1 \leq \mu$. Τότε $\lambda < \lambda + 1 \leq \mu$

και επομένως $\mu = \lambda + \kappa$ με $\kappa \geq 1$.

Άρα $\mu = \lambda + (\kappa^- + 1) = (\lambda + 1) + \kappa^-$,

όπου κ^- είναι ο αριθμός, ο αμέσως προηγούμενος του κ . Άρα η πρόταση ισχύει και με $\nu = \lambda + 1$. Επομένως η πρόταση ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \mu \leq \nu &\Leftrightarrow \nu = \mu + x, \quad x \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \nu + \kappa = \mu + x + \kappa = \\ &= (\mu + \kappa) + x \Leftrightarrow \mu + \kappa \leq \nu + \kappa \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{(iv)} \quad \mu \leq \nu &\Leftrightarrow \nu = \mu + x, \quad x \in \mathbb{N} \\ \lambda \leq \rho &\Leftrightarrow \rho = \lambda + y, \quad y \in \mathbb{N} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nu + \rho = (\mu + \lambda) + (x + y) \Rightarrow \mu + \lambda \leq \nu + \rho.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι στο \mathbb{N} ορίζεται μια πράξη $+$ που ικανοποιεί τις ιδιότητες 1-5. Άρα η δομή $(\mathbb{N}, +)$ είναι ημιομάδα και μάλιστα αντιμεταθετική και με ουδέτερο στοιχείο το μηδέν.

Επομένως,

Η δομή $(\mathbb{N}, +)$ είναι αντιμεταθετική ημιομάδα με ουδέτερο στοιχείο το 0.

2.3. Ο πολλαπλασιασμός στο \mathbb{N}

Στο σύνολο \mathbb{N} ορίζουμε τις σχέσεις:

$$A_1: \mu \cdot 1 = \mu, \quad \forall \mu \in \mathbb{N} \quad \text{και}$$

$$A_2: \mu \cdot \nu^+ = \mu \cdot \nu + \mu, \quad \forall \mu, \nu \in \mathbb{N}.$$

Οι σχέσεις αυτές ορίζουν μια εσωτερική πράξη στο \mathbb{N} που την ονομάζουμε πολλαπλασιασμό. Με τη βοήθεια των αξιωμάτων A_1 μέχρι A_2 και των ιδιοτήτων της πρόσθεσης, που έχουμε αποδείξει, μπορούμε να δείξουμε ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$\mu \cdot 0 = 0$$

Απόδειξη

$$\mu \stackrel{A_2}{=} \mu \cdot 1 = \mu \cdot 0^+ \stackrel{A_1}{=} \mu \cdot 0 + \mu.$$

Άρα το $\mu \cdot 0$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης και επομένως

$$\mu \cdot 0 = 0, \quad \forall \mu \in \mathbb{N}.$$

2. Για κάθε $\mu, \nu, \kappa \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$\mu \cdot (\nu + \kappa) = \mu \cdot \nu + \mu \cdot \kappa$$

Απόδειξη

Με $\kappa = 0$, έχουμε, $\mu \cdot (v + 0) = \mu \cdot v$ και $\mu \cdot v + \mu \cdot 0 = \mu \cdot v + 0 = \mu \cdot v$. Άρα:

$$\mu(v + 0) = \mu \cdot v + \mu \cdot 0$$

Με $\kappa = 1$, έχουμε, $\mu(v + 1) = \mu \cdot v^+ = \mu \cdot v + \mu$ (από το A_3) $= \mu \cdot v + \mu \cdot 1$.

Δεχόμαστε ότι:

$$\mu \cdot (v + \kappa) = \mu \cdot v + \mu \cdot \kappa$$

και θα δείξουμε ότι:

$$\mu \cdot [v + (\kappa + 1)] = \mu \cdot v + \mu \cdot (\kappa + 1).$$

Πραγματικά,

$$\begin{aligned} \mu \cdot [v + (\kappa + 1)] &= \mu \cdot [(v + \kappa) + 1] = \mu \cdot (v + \kappa) + \mu \cdot 1 = \\ &= \mu \cdot v + \mu \cdot \kappa + \mu \cdot 1 = \mu \cdot v + \mu(\kappa + 1). \end{aligned}$$

Άρα η πρόταση ισχύει για κάθε $\kappa \in \mathbb{N}$.

3. Αντιμεταθετική ιδιότητα

Για κάθε $\mu, v \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$\mu \cdot v = v \cdot \mu$$

Απόδειξη

Έχουμε τον προτασιακό τύπο $P(\mu, v)$. Οι προτάσεις $P(0, 0)$ και $P(1, 1)$ είναι αληθείς.

Δεχόμαστε ότι η $P(1, \kappa)$ είναι αληθής. Δηλαδή δεχόμαστε ότι:

$$1 \cdot \kappa = \kappa \cdot 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } 1 \cdot (\kappa + 1) &= 1 \cdot \kappa^+ = 1 \cdot \kappa + 1 \quad (\text{από το } A_3) = \\ &= \kappa \cdot 1 + 1 = \kappa + 1 = (\kappa + 1) \cdot 1. \end{aligned}$$

Επομένως η $P(1, v)$ είναι αληθής για κάθε $v \in \mathbb{N}$.

Δεχόμαστε ότι η $P(\lambda, v)$ είναι αληθής. Δηλαδή δεχόμαστε ότι:

$$\lambda \cdot v = v \cdot \lambda \quad \text{με } \lambda \in \mathbb{N}, \lambda < \mu.$$

Τότε:

$$v \cdot (\lambda + 1) = v \cdot \lambda^+ = v \cdot \lambda + v.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι:

$$\lambda \cdot v + 1 \cdot v = (\lambda + 1) \cdot v.$$

Πράγματι για $v = 1$ ισχύει.

Δεχόμαστε ότι:

$$(\lambda + 1) \cdot \kappa = \lambda \cdot \kappa + \kappa.$$

Τότε:

$$\begin{aligned} (\lambda + 1) \cdot (\kappa + 1) &= (\lambda + 1) \cdot \kappa^+ = (\lambda + 1) \cdot \kappa + \lambda + 1 = \lambda \cdot \kappa + 1 \cdot \kappa + \lambda + 1 = \\ &= \lambda \cdot \kappa + \lambda \cdot 1 + 1 \cdot \kappa + 1 = \lambda \cdot (\kappa + 1) + 1 \cdot (\kappa + 1). \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } (\lambda + 1) \cdot v = \lambda \cdot v + 1 \cdot v, \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Άρα } v \cdot (\lambda + 1) = v \cdot \lambda + v \cdot 1 = \lambda \cdot v + 1 \cdot v = (\lambda + 1) \cdot v.$$

κι επομένως η πρόταση είναι αληθής $\forall \mu, v \in \mathbb{N}$.

4. Επιμεριστική του πολ/σμού ως προς την πρόσθεση:

Για κάθε $\mu, v, \kappa \in \mathbb{N}$ ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$\mu \cdot (\nu + \kappa) = \mu \cdot \nu + \mu \cdot \kappa \quad \text{και} \quad (\nu + \kappa) \cdot \mu = \nu \cdot \mu + \kappa \cdot \mu$$

Απόδειξη

Προκύπτει αμέσως από τις ιδιότητες 2 και 3.

5. Ουδέτερου στοιχείου:

Για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$\mu \cdot 1 = 1 \cdot \mu = \mu$$

Απόδειξη

Είναι άμεση συνέπεια της ιδιότητας 3 και του αξιώματος A_7 .

6. Απορροφητικού στοιχείου:

Για κάθε $\mu \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση $\mu \cdot 0 = 0 \cdot \mu = 0$

Απόδειξη

Είναι άμεση συνέπεια των ιδιοτήτων 1 και 3.

7. Προσεταιριστική:

Για κάθε $\mu, \nu, \kappa \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$\mu \cdot (\nu \cdot \kappa) = (\mu \cdot \nu) \cdot \kappa$$

Απόδειξη

Με $\kappa = 0$ έχουμε $\mu \cdot (\nu \cdot 0) = \mu \cdot 0 = 0$ και $(\mu \cdot \nu) \cdot 0 = 0$.

Άρα $\mu \cdot (\nu \cdot 0) = (\mu \cdot \nu) \cdot 0$.

Με $\kappa = 1$ έχουμε $\mu \cdot (\nu \cdot 1) = \mu \cdot \nu$ και $(\mu \cdot \nu) \cdot 1 = \mu \cdot \nu$.

Άρα $\mu \cdot (\nu \cdot 1) = (\mu \cdot \nu) \cdot 1$.

Δεχόμαστε ότι: $\mu \cdot (\nu \cdot \kappa) = (\mu \cdot \nu) \cdot \kappa$.

Τότε: $(\mu \cdot \nu) (\kappa + 1) = (\mu \cdot \nu) \cdot \kappa + (\mu \cdot \nu) \cdot 1 =$

$$= \mu \cdot (\nu \cdot \kappa) + \mu \cdot (\nu \cdot 1) = \mu \cdot [(\nu \cdot \kappa) + (\nu \cdot 1)] = \mu \cdot [\nu \cdot (\kappa + 1)].$$

Άρα η πρόταση ισχύει για κάθε $\mu, \nu, \kappa \in \mathbb{N}$.

8. Ιδιότητα της διαγραφής:

Για κάθε $\mu, \nu, \kappa \in \mathbb{N}$, με $\kappa \neq 0$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \mu \cdot \kappa = \nu \cdot \kappa &\Leftrightarrow \mu = \nu \quad \text{και} \\ \kappa \cdot \mu = \kappa \cdot \nu &\Leftrightarrow \mu = \nu \end{aligned}$$

Απόδειξη

Λόγω της ιδιότητας 3 αρκεί να δείξουμε την πρώτη σχέση.

Η $\mu = \nu \Rightarrow \mu \cdot \kappa = \nu \cdot \kappa$ είναι προφανής.

Θα δείξουμε το αντίστροφο.

Με $\kappa = 1$ έχουμε:

$$\mu = \mu \cdot 1 = \nu \cdot 1 = \nu.$$

Δεχόμαστε ότι:

$$\mu \cdot \lambda = \nu \cdot \lambda \Rightarrow \mu = \nu, \quad \forall \lambda \in \mathbb{N}, \lambda \neq 0, \lambda < \kappa.$$

Τότε: $\mu \cdot (\lambda + 1) = \nu \cdot (\lambda + 1) \Leftrightarrow \mu \cdot \lambda + \mu = \nu \cdot \lambda + \nu.$

Αν $\mu \neq \nu$ θα υπάρχει $\rho \in \mathbb{N}$, τέτοιο, ώστε $\mu = \nu + \rho$ (δεχόμαστε ότι $\mu > \nu$, αν $\mu < \nu$ θέτουμε $\nu = \mu + \rho$ και η διαδικασία είναι ανάλογη) κι έχουμε:

$$\begin{aligned} \mu \cdot \lambda + \mu = \nu \cdot \lambda + \nu &\Leftrightarrow (\nu + \rho) \cdot \lambda + \nu + \rho = \nu \cdot \lambda + \nu \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \nu \cdot \lambda + \rho \cdot \lambda + \nu + \rho = \nu \cdot \lambda + \nu \Leftrightarrow \rho \cdot \lambda + \rho = 0, \end{aligned}$$

που είναι αδύνατο με $\rho \in \mathbb{N}$, εκτός αν $\rho = 0$.

Τότε όμως $\nu = \mu + 0 = \mu$, που είναι άτοπο.

9. Ιδιότητα της διάταξης:

Για κάθε $\mu, \nu, \kappa \in \mathbb{N}$, με $\kappa \neq 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\begin{aligned} \mu \cdot \kappa &\leq \nu \cdot \kappa \\ \mu &\leq \nu \Leftrightarrow \kappa \cdot \mu &\leq \kappa \cdot \nu \end{aligned}$$

Απόδειξη

Έστω $\mu \leq \nu$. Τότε από την ιδιότητα 5 της πρόσθεσης έχουμε $\nu = \mu + \rho$ για κάποιο $\rho \in \mathbb{N}$. Άρα:

$$\nu \cdot \kappa = (\mu + \rho) \cdot \kappa = \mu \cdot \kappa + \rho \cdot \kappa,$$

που δίνει $\mu \cdot \kappa \leq \nu \cdot \kappa$.

Επίσης $\kappa \cdot \nu = \kappa \cdot (\mu + \rho) = \kappa \cdot \mu + \kappa \cdot \rho,$

που δίνει $\kappa \cdot \mu \leq \kappa \cdot \nu$.

Αντίστροφα. Έστω $\mu \cdot \kappa \leq \nu \cdot \kappa$. Τότε $\nu \cdot \kappa = \mu \cdot \kappa + \theta$.

Αν $\nu < \mu$, θα είναι $\mu = \nu + \xi$, με $\xi \neq 0, \xi \in \mathbb{N}$

κι επομένως $\nu \cdot \kappa = (\nu + \xi) \cdot \kappa + \theta = \nu \cdot \kappa + \xi \cdot \kappa + \theta,$

που δίνει $0 = \xi \cdot \kappa + \theta$.

Επειδή $\kappa \neq 0$ η σχέση $0 = \xi \cdot \kappa + \theta$ ισχύει μόνο όταν $\xi = \theta = 0$, που είναι άτοπο, αφού $\xi \neq 0$.

Άρα $\mu \leq \nu$ και η ιδιότητα αποδείχτηκε.

Απ' όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο πολλαπλασιασμός είναι εσωτερική πράξη στο \mathbb{N} , έχει ουδέτερο στοιχείο το 1 και απορροφητικό το 0. Ο πολλαπλασιασμός είναι πράξη αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική ως προς την πράξη της πρόσθεσης. Επομένως:

Η δομή (\mathbb{N}, \cdot) είναι αντιμεταθετική ημιομάδα.

Στην επόμενη πρόταση θα δούμε ότι μεταξύ ενός φυσικού αριθμού ν και του επομένου του ν^+ δεν υπάρχει άλλος φυσικός αριθμός.

Πρόταση 2.3

Να δειχτεί ότι δεν υπάρχει φυσικός αριθμός x με:

- (i) $0 < x < 1$ ή
 (ii) $v < x < v + 1, \forall v \in \mathbb{N}.$

Απόδειξη

- (i) Έστω $A = \{x \in \mathbb{N} / 0 < x < 1\}.$

Θα δείξουμε ότι

$$A = \emptyset.$$

Αν $A \neq \emptyset$, τότε το A έχει ελάχιστο στοιχείο, αφού $A \subseteq \mathbb{N}$.

Έστω $x_0 = \min A$. Τότε $0 < x_0 < 1$, που δίνει $0 < x_0^2 < x_0 < 1$.

Άρα $x_0^2 \in A$ και $x_0^2 < x_0$, άτοπο, αφού το x_0 είναι το ελάχιστο στοιχείο του A .

- (ii) Αν $v < x < v + 1$ για κάποιο $v \in \mathbb{N}$, τότε:

$$v - v = 0 < x - v < v + 1 - v = 1.$$

Δηλαδή ο φυσικός αριθμός $x - v$ θα βρίσκεται μεταξύ 0 και 1, που είναι αδύνατο από την (i).

2.4. Πράξεις συμβιβαστές με σχέσεις

Έστω A ένα μη κενό σύνολο, φ μια διμελής σχέση στο A , και, $*$ μια εσωτερική πράξη στο A .

Ορισμός

Η διμελής σχέση φ είναι συμβιβαστή με την πράξη $*$, αν ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \alpha \varphi \beta &\Rightarrow (\alpha * x) \varphi (\beta * x) \text{ και} \\ \alpha \varphi \beta &\Rightarrow (x * \alpha) \varphi (x * \beta) \end{aligned}$$

για κάθε α, β, x στοιχεία του A .

Αν ισχύει μόνο η πρώτη σχέση, τότε η φ λέγεται συμβιβαστή δεξιά με την πράξη $*$. Αν ισχύει μόνο η δεύτερη σχέση, η φ λέγεται συμβιβαστή αριστερά με την πράξη $*$.

Αν η σχέση φ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο A , τότε ισχύει η πρόταση:

Πρόταση 2.4.

Μια σχέση ισοδυναμίας φ στο σύνολο A ($A \neq \emptyset$) είναι συμβιβαστή ως προς την εσωτερική πράξη $*$ του A , αν και μόνο αν για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A$ ισχύει η σχέση:

$$(\alpha \varphi \beta) \wedge (\gamma \varphi \delta) \Rightarrow (\alpha * \gamma) \varphi (\beta * \delta) \quad (1)$$

Απόδειξη

Έστω ότι η φ είναι συμβιβαστή με την πράξη $*$. Τότε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \alpha \varphi \beta &\Rightarrow (\alpha * \gamma) \varphi (\beta * \gamma) \text{ και} \\ \gamma \varphi \delta &\Rightarrow (\beta * \gamma) \varphi (\beta * \delta). \end{aligned}$$

Επομένως $(\alpha \varphi \beta) \wedge (\gamma \varphi \delta) \Rightarrow (\alpha * \gamma) \varphi (\beta * \gamma) \wedge (\beta * \gamma) \varphi (\beta * \delta)$

Επειδή όμως η φ είναι μεταβατική, αφού είναι σχέση ισοδυναμίας, θα έχουμε:

$$(\alpha \varphi \beta) \wedge (\gamma \varphi \delta) \Rightarrow (\alpha * \gamma) \varphi (\beta * \delta)$$

Έστω ότι ισχύει η (1). Τότε με $\gamma = \delta = x$ έχουμε:

$$\alpha \varphi \beta \Rightarrow (\alpha * x) \varphi (\beta * x)$$

και με $\alpha = \beta = x$ έχουμε ότι:

$$\gamma \varphi \delta \Rightarrow (x * \gamma) \varphi (x * \delta).$$

Άρα η φ είναι συμβιβαστή με την πράξη $*$.

Π.χ. στο σύνολο V των διανυσμάτων του επιπέδου η σχέση ισοδυναμίας φ που εκφράζεται με την πρόταση «το α είναι ισοδύναμο με το β » είναι συμβιβαστή με την πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων, γιατί

$$\alpha = \beta \wedge \gamma = \delta \Rightarrow (\alpha + \gamma) = (\beta + \delta)$$

Επίσης στο σύνολο N των φυσικών αριθμών, η σχέση της ισότητας είναι συμβιβαστή με την πράξη της πρόσθεσης, καθώς και με την πράξη του πολλαπλασιασμού, γιατί,

$$\begin{aligned} \alpha = \beta \wedge \gamma = \delta &\Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta \text{ και} \\ \alpha = \beta \wedge \gamma = \delta &\Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \delta \end{aligned}$$

Αν η σχέση φ είναι σχέση διάταξης στο A και είναι συμβιβαστή με την εσωτερική πράξη $*$ του A , τότε το ομαδοειδές $(A, *)$ λέγεται διατεταγμένο ως προς τη σχέση φ . Αν η φ είναι σχέση ολικής διάταξης στο A , τότε το $(A, *)$ λέγεται ολικά διατεταγμένο ομαδοειδές.

Ορισμός

Η δομή $(A, *)$ λέγεται ολικά διατεταγμένη, αν υπάρχει μια σχέση « \leq » που ικανοποιεί συγχρόνως τις ιδιότητες:

- (i) η σχέση « \leq » είναι σχέση ολικής διάταξης στο A και
- (ii) η σχέση « \leq » είναι συμβιβαστή με την πράξη $*$.

Αν η δομή $(A, *)$ είναι ημιομάδα ή ομάδα, τότε μιλάμε για ολικά διατεταγμένη ημιομάδα ή ολικά διατεταγμένη ομάδα αντίστοιχα.

Από την ιδιότητα 5 της πρόσθεσης στο N έχουμε ότι ισχύει:

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha + x \leq \beta + x \quad \forall \alpha, \beta, x \in N.$$

Αυτό σημαίνει ότι η σχέση « \leq » είναι συμβιβαστή με την πράξη της πρόσθεσης στο N . Επειδή η σχέση « \leq » είναι ολική διάταξη στο N , έπεται ότι:

Η ημιομάδα $(N, +)$ είναι ολικά διατεταγμένη ως προς τη σχέση « \leq ».

Από την ιδιότητα 9 του πολλαπλασιασμού στο N έχουμε ότι:

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \cdot x \leq \beta \cdot x \quad \forall x \in N.$$

Άρα η σχέση « \leq » είναι συμβιβαστή με την πράξη του πολλαπλασιασμού στο \mathbb{N} . Επομένως:

Η ημιομάδα (\mathbb{N}, \cdot) είναι ολικά διατεταγμένη ως προς τη σχέση \leq .

Για το δακτύλιο $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός

Ο δακτύλιος $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ λέγεται ολικά διατεταγμένος ως προς τη σχέση « \leq », αν η σχέση αυτή είναι σχέση ολικής διάταξης στο \mathbb{A} και ικανοποιεί συγχρόνως τις ιδιότητες:

- (i) Είναι συμβιβαστή με την πράξη $+$ της πρόσθεσης και
- (ii) Για κάθε α, β, κ στο \mathbb{A} με $\kappa \geq 0$ ισχύει η σχέση:

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha \cdot \kappa \leq \beta \cdot \kappa \quad \text{και} \quad \kappa \cdot \alpha \leq \kappa \cdot \beta.$$

3. Κατασκευή του συνόλου \mathbb{Z} των Ακτράιων

3.1. Κλάσεις ισοδυναμίας

Έστω φ μια σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο \mathbb{A} ($\mathbb{A} \neq \emptyset$). Όπως είναι γνωστό, η φ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- (i) Ανακλαστική: $\alpha \varphi \alpha$
- (ii) Συμμετρική: $\alpha \varphi \beta \Rightarrow \beta \varphi \alpha$, και,
- (iii) Μεταβατική: $\alpha \varphi \beta \wedge \beta \varphi \gamma \Rightarrow \alpha \varphi \gamma$.

Δυο στοιχεία α, β του \mathbb{A} που συνδέονται με τη σχέση φ λέγονται **ισοδύναμα**. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} \alpha \varphi \beta &\Leftrightarrow \alpha \text{ ισοδύναμο με το } \beta \text{ και} \\ \alpha \not\varphi \beta &\Leftrightarrow \alpha \text{ όχι ισοδύναμο με το } \beta. \end{aligned}$$

Έστω $\alpha \in \mathbb{A}$. Σχηματίζουμε το σύνολο $\bar{\alpha}$, το οποίο περιέχει όλα τα στοιχεία του \mathbb{A} που είναι ισοδύναμα με το α . Δηλαδή:

$$\bar{\alpha} = \{x \in \mathbb{A} / x \varphi \alpha\}$$

Το σύνολο $\bar{\alpha}$ λέγεται **κλάση ισοδυναμίας** του \mathbb{A} κατά τη σχέση φ . Το στοιχείο α και κάθε ισοδύναμό του λέγεται **εκπρόσωπος** της κλάσης $\bar{\alpha}$.

Παίρνουμε τώρα ένα στοιχείο $\beta \in \mathbb{A}$, με $\beta \notin \bar{\alpha}$ και σχηματίζουμε το σύνολο

$$\bar{\beta} = \{y \in \mathbb{A} / y \varphi \beta\}$$

Το $\bar{\beta}$ είναι επίσης μια κλάση ισοδυναμίας του \mathbb{A} . Στη συνέχεια παίρνουμε ένα στοιχείο $\gamma \in \mathbb{A}$ με $\gamma \notin \bar{\alpha} \cup \bar{\beta}$ και σχηματίζουμε το σύνολο

$$\bar{\gamma} = \{\omega \in \mathbb{A} / \omega \varphi \gamma\} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Τα σύνολα $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \dots$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας του \mathbb{A} και αποτελούν διαμέριση του συνόλου \mathbb{A} .

Έστω C το σύνολο των κλάσεων $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \dots$

Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε με A/φ ή $A/\text{mod } \varphi$ και το ονομάζουμε **σύνολο πηλίκου** του A κατά τη σχέση φ . Είναι δηλαδή:

$$A/\varphi = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{y}, \dots\}$$

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε μια εσωτερική πράξη στο A/φ με τη βοήθεια μιας εσωτερικής πράξης στο A .

Έστω $*$ μια εσωτερική πράξη στο A . Ορίζουμε μεταξύ A και A/φ μια σχέση f

$$f: A \rightarrow A/\varphi, \text{ με } f(x) = \bar{x}.$$

Είναι φανερό ότι η f είναι μια απεικόνιση του A στο A/φ . Αν $x \varphi y$ με $x, y \in A$, τότε $f(x) = f(y)$ και $\forall \bar{x} \in A/\varphi$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο, ώστε $f(x) = \bar{x}$. Δηλαδή η f είναι μια απεικόνιση επί.

Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται **κανονική απεικόνιση** του A στο A/φ .

Έστω $a, b \in A$, με $a \varphi b$, δηλαδή το a δεν είναι ισοδύναμο με το b . Τότε:

$$f(a) = \bar{a} \quad \text{και} \quad f(b) = \bar{b}.$$

Αν πάρουμε ένα στοιχείο x του \bar{a} και ένα στοιχείο y του \bar{b} , τότε θα έχουμε $x \varphi a \wedge y \varphi b$. Αν η πράξη $*$ είναι συμβιβαστή με τη σχέση φ , τότε θα έχουμε (πρόταση 2.6)

$$x \varphi a \wedge y \varphi b \Rightarrow (x * y) \varphi (a * b).$$

Αυτό σημαίνει ότι το στοιχείο $x * y$ είναι στοιχείο της κλάσης $\overline{a * b}$ κι αυτό

$$\forall x \in \bar{a} \quad \text{και} \quad \forall y \in \bar{b}.$$

Η σχέση αυτή μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι με τη βοήθεια της πράξης $*$ στο A μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη \odot στο A/φ έτσι, ώστε:

$$\bar{a} \odot \bar{b} = \overline{a * b} \quad (1)$$

Επειδή $f(x * y) = f(a * b) = \overline{a * b}$, $\forall x \in \bar{a}$ και $\forall y \in \bar{b}$,

έπεται ότι η σχέση (1) ισχύει ανεξάρτητα από τους εκπροσώπους των κλάσεων που θα επιλέξουμε.

Η σχέση (1) είναι πολύ σημαντική, και, αυτή θα εφαρμόσουμε για τις κατασκευές των συνόλων Z, Q, R .

3.2. Το σύνολο Z

Το σύνολο N των φυσικών αριθμών, εφοδιασμένο με τα αξιώματα του Peano, τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού μαζί με τις ιδιότητες των πράξεων αυτών, είναι ένα Αριθμητικό Σύστημα. Στο Σύστημα αυτό υπάρχουν προβλήματα που είναι αδύνατο να λυθούν με όρους του ίδιου συστήματος. Η εξίσωση της μορφής

$$x + \beta = \alpha,$$

για παράδειγμα, με $\beta > \alpha$ δεν έχει λύση στο N .

Υπάρχει επομένως ανάγκη επέκτασης του N . Δηλαδή υπάρχει ανάγκη κατασκευής ενός νέου συστήματος, το οποίο θα έχει ένα υποσύνολο ισόμορφο με το N και στο νέο αυτό Σύστημα η εξίσωση $x + \beta = \alpha$ θα έχει πάντοτε λύση.

Παίρνουμε την εξίσωση

$$x + \beta = \alpha, \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \in N \quad (2)$$

Με $x \in N$, $x =$ σταθερό, υπάρχουν πολλά ζεύγη φυσικών α, β που την ικανοποιούν. Συμβολίζουμε με $(\alpha, \beta)^9$ το διατεταγμένο ζεύγος των αριθμών α, β που ικανοποιούν την (2).

Δυο ζεύγη (α, β) και (γ, δ) που ικανοποιούν την εξίσωση (2) λέγονται ισοδύναμα.

Έστω ότι τα διατεταγμένα ζεύγη (α, β) και (γ, δ) ικανοποιούν την (2). Τότε θα έχουμε:

$$x + \beta = \alpha \quad \text{και} \quad x + \delta = \gamma,$$

που δίνουν

$$x + \beta + \delta = \alpha + \delta \quad \text{και} \quad x + \delta + \beta = \beta + \gamma.$$

Δηλαδή

$$x + \beta + \delta = \alpha + \delta = \beta + \gamma.$$

Αυτό μας οδηγεί στην παρακάτω κατασκευή.

Στο σύνολο $N \times N$ ορίζουμε μια σχέση φ , τέτοια ώστε:

$$(\alpha, \beta) \varphi (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \alpha + \delta = \beta + \gamma \quad (3)$$

Η σχέση φ είναι μια σχέση ισοδυναμίας στο $N \times N$. Πραγματικά η σχέση φ είναι:

- Αυτοπαθής, γιατί $(\alpha, \beta) \varphi (\alpha, \beta)$, αφού $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.
- Συμμετρική, γιατί $(\alpha, \beta) \varphi (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \alpha + \delta = \beta + \gamma \Leftrightarrow \gamma + \beta = \delta + \alpha \Leftrightarrow (\gamma, \delta) \varphi (\alpha, \beta)$ και
- Μεταβατική, γιατί $(\alpha, \beta) \varphi (\gamma, \delta) \wedge (\gamma, \delta) \varphi (\epsilon, \zeta) \Leftrightarrow \alpha + \delta = \beta + \gamma \wedge \gamma + \zeta = \delta + \epsilon \Rightarrow \alpha + \delta + \gamma + \zeta = \beta + \gamma + \delta + \epsilon \Rightarrow \alpha + \zeta = \beta + \epsilon \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \varphi (\epsilon, \zeta)$.

Επομένως μπορούμε να διαμερίσουμε το $N \times N$ σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τη σχέση φ σύμφωνα με την παράγραφο 3.1.

Για ευκολία στις πράξεις μας, αντί $(\alpha, \beta) \varphi (\gamma, \delta)$, θα γράφουμε $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$. Έτσι η σχέση (3) γράφεται:

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \alpha + \delta = \beta + \gamma \quad (3')$$

Παριστάνουμε με $[\alpha, \beta]$ την κλάση ισοδυναμίας του $N \times N$ που έχει αντιπρόσωπο το στοιχείο (α, β) . Είναι δηλαδή:

$$[\alpha, \beta] = \{(x, y) \in N \times N / (x, y) = (\alpha, \beta)\}.$$

9. Το ζεύγος (α, β) να θεωρηθεί ως η διαφορά $\alpha - \beta$.

Συμβολίζουμε με Z το σύνολο όλων αυτών των κλάσεων, δηλαδή το σύνολο-πηλίκο $(N \times N)/\varphi$. Τότε έχουμε:

$$Z = (N \times N)/\varphi = \{[a, b] \mid (a, b) \in N \times N\}$$

Επομένως τα στοιχεία του Z είναι της μορφής $[a, b]$ με $(a, b) \in N \times N$. Τα στοιχεία αυτά ονομάζονται ακέραιοι αριθμοί και το καθένα είναι μια κλάση ισοδυναμίας.

Από τη σχέση (3') προκύπτει ότι:

$$(a + \kappa, b + \kappa) = (a, b) \quad \forall \kappa \in N,$$

αφού $a + \kappa + b = b + \kappa + a$. Έτσι οι κλάσεις $[a, b]$ διαμορφώνονται ως εξής:

(i) Με $a = b$ έχουμε $[a, b] = [a, a] = [0, 0]$

(ii) Με $a < b$, είναι $b = a + \kappa$, $\kappa \in N^*$ και επομένως

$$[a, b] = [a, a + \kappa] = [0, \kappa], \kappa \neq 0.$$

(iii) Με $b < a$, είναι $a = b + \rho$, $\rho \in N$, $\rho \neq 0$ και επομένως

$$[a, b] = [b + \rho, b] = [\rho, 0], \rho \neq 0.$$

3.3. Η πρόσθεση στο Z

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε στο Z μια πράξη πρόσθεσης \oplus , η οποία να ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες που έχει η αντίστοιχη της πράξη στο N και επιπλέον η εξίσωση $x \oplus b = a$ να έχει λύση για κάθε $a, b \in Z$. Θα συμβολίζουμε και την πράξη \oplus με $+$.

Στο σύνολο $N \times N$ ορίζουμε την πρόσθεση ως εξής:

$$(a, b) + (\gamma, \delta) = (a + \gamma, b + \delta) \quad (4)$$

Η πράξη αυτή είναι συμβιβαστή με τη σχέση (3'). Πραγματικά αν

$$(a, b) = (a', b') \quad \wedge \quad (\gamma, \delta) = (\gamma', \delta'),$$

τότε θα έχουμε:

$$a + \gamma = a' + \gamma' \quad \wedge \quad b + \delta = b' + \delta',$$

που δίνουν

$$\begin{aligned} a + \gamma + b + \delta &= a' + \gamma' + b' + \delta' \Leftrightarrow (a + \gamma) + (b + \delta) = (a' + \gamma') + (b' + \delta') \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a + \gamma, b + \delta) = (a' + \gamma', b' + \delta') \Leftrightarrow (a, b) + (\gamma, \delta) = (a', b') + (\gamma', \delta'). \end{aligned}$$

Επειδή η σχέση (3') είναι συμβιβαστή με την πράξη της πρόσθεσης στο $N \times N$, όπως ορίστηκε στην (4), μπορούμε, σύμφωνα με τη σχέση (1) της παραγράφου 3.1, να ορίσουμε στο $Z = (N \times N)/\varphi$ μια πράξη πρόσθεσης $+$ με:

$$[a, b] + [\gamma, \delta] = [a + \gamma, b + \delta] \quad (5)$$

Θα δείξουμε ότι η πράξη αυτή ικανοποιεί τις ιδιότητες:

1. Αντιμεταθετική

$$[a, b] + [\gamma, \delta] = [\gamma, \delta] + [a, b]$$

για κάθε $[α, β], [γ, δ]$ στοιχεία του Z .

Πραγματικά,

$$[α, β] + [γ, δ] = [α + γ, β + δ] = [γ + α, δ + β] = [γ, δ] + [α, β]$$

2. Προσεταιριστική

$$[α, β] + ([γ, δ] + [ε, ζ]) = ([α, β] + [γ, δ]) + [ε, ζ]$$

για κάθε $[α, β], [γ, δ], [ε, ζ]$ στοιχεία του Z .

Απόδειξη

$$\begin{aligned} [α, β] + ([γ, δ] + [ε, ζ]) &= [α, β] + [γ + ε, δ + ζ] = \\ &= [α + (γ + ε), β + (δ + ζ)] = [(α + γ) + ε, (β + δ) + ζ] = \\ &= [α + γ, β + δ] + [ε, ζ] = ([α, β] + [γ, δ]) + [ε, ζ] \end{aligned}$$

3. Ουδέτερου στοιχείου

Αν $[x, y]$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης στο Z , τότε θα έχουμε:

$$[α, β] + [x, y] = [α, β], \quad \forall [α, β] \in Z$$

Άρα

$$[α + x, β + y] = [α, β] \Leftrightarrow α + x + β = β + y + α \Leftrightarrow x = y.$$

Επομένως το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης στο Z είναι το στοιχείο

$$[x, x] = [0, 0].$$

4. Συμμετρικού στοιχείου

Αν $[x, y]$ είναι το συμμετρικό (αντίθετο) στοιχείο του $[α, β]$ ως προς την πρόσθεση στο Z , τότε θα έχουμε:

$$[α, β] + [x, y] = [0, 0]$$

Η σχέση αυτή δίνει:

$$[α + x, β + y] = [0, 0] \Leftrightarrow α + x = β + y.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει με $x = β$ και $y = α$. Άρα:

$$[x, y] = [β, α]$$

και το συμμετρικό του $[α, β]$ στο Z είναι το $[β, α]$.

$$\text{Πραγματικά, } [α, β] + [β, α] = [α + β, β + α] = [0, 0].$$

Με βάση την ιδιότητα αυτή παρατηρούμε ότι η εξίσωση $x + b = a$, με a, b στοιχεία του Z έχει πάντοτε λύση στο Z .

Πραγματικά, έστω

$$X = [x, y], a = [α, β], b = [γ, δ].$$

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} X + b = a &\Leftrightarrow [x, y] + [γ, δ] = [α, β] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ([x, y] + [γ, δ]) + [δ, γ] = [α, β] + [δ, γ] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow [x, y] + ([\gamma, \delta] + [\delta, \gamma]) = [\alpha, \beta] + [\delta, \gamma] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x, y] + [0, 0] = [\alpha, \beta] + [\delta, \gamma] \Leftrightarrow [x, y] = [\alpha, \beta] + [\gamma, \delta]$$

5. Ιδιότητα της διαγραφής

$$[\alpha, \beta] + [x, y] = [\gamma, \delta] + [x, y] \Leftrightarrow [\alpha, \beta] = [\gamma, \delta]$$

για κάθε $[\alpha, \beta], [\gamma, \delta], [x, y]$ στοιχεία του Z .

Απόδειξη

$$[\alpha, \beta] + [x, y] = [\gamma, \delta] + [x, y] \Leftrightarrow [\alpha + x, \beta + y] = [\gamma + x, \delta + y] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha + x + \delta + y = \beta + y + \gamma + x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \delta = \beta + \gamma \Leftrightarrow [\alpha, \beta] = [\gamma, \delta].$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Το σύνολο Z των ακεραίων, ως προς την πράξη της πρόσθεσης όπως ορίστηκε στην (5), είναι αντιμεταθετική ομάδα με ουδέτερο στοιχείο το $[0, 0]$ και αντίθετο του $[\alpha, \beta]$ το $[\beta, \alpha]$ για κάθε $[\alpha, \beta] \in Z$.

3.4. Ο πολλαπλασιασμός στο Z

Στο $N \times N$ ορίζουμε μια πράξη πολλαπλασιασμού ως εξής:

$$(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma + \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma)^{10} \quad (6)$$

Στη συνέχεια ελέγχουμε αν η πράξη αυτή είναι συμβιβαστή με τη σχέση (3'). Δηλαδή ελέγχουμε αν οι

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) \wedge (\alpha', \beta') = (\gamma', \delta')$$

δίνουν $(\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\gamma, \delta) \cdot (\gamma', \delta')$

Αυτό πραγματικά ισχύει γιατί οι $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$ και $(\alpha', \beta') = (\gamma', \delta')$ δίνουν $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ και $\alpha' + \delta' = \beta' + \gamma'$.

Τώρα, από τις: $\alpha - \beta = \gamma - \delta$ και $\alpha' - \beta' = \gamma' - \delta'$,

με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, έχουμε τελικά:

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\delta' + \delta\gamma' = \alpha\beta' + \beta\alpha' + \gamma\gamma' + \delta\delta' \Leftrightarrow (\alpha\alpha' + \beta\beta', \alpha\beta' + \beta\alpha') =$$

$$= (\gamma\gamma' + \delta\delta', \gamma\delta' + \delta\gamma') \Leftrightarrow (\alpha, \beta) \cdot (\alpha', \beta') = (\gamma, \delta) \cdot (\gamma', \delta')$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (1) της παραγράφου 3.1. μπορούμε να ορίσουμε στο Z μια πράξη \odot , που θα την ονομάζουμε πολλαπλασιασμό, ως εξής:

$$[\alpha, \beta] \odot [\gamma, \delta] = [\alpha\gamma + \beta\delta, \alpha\delta + \beta\gamma]$$

10. Βλέπε το γινόμενο $(\alpha - \beta) \cdot (\gamma - \delta) = \alpha\gamma + \beta\delta - \alpha\delta - \beta\gamma$.

Θα δείξουμε τώρα ότι η πράξη \odot στο Z ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες. [Για ευκολία στο συμβολισμό θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο \cdot αντί του \odot]:

1. Αντιμεταθετική

$$[a, b] \cdot [c, d] = [c, d] \cdot [a, b]$$

για κάθε $[a, b], [c, d]$ στοιχεία του Z .

Πραγματικά,

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac + bd, ad + bc] = [ca + db, da + cb] = [c, d] \cdot [a, b]$$

2. Προσεταιριστική

$$[a, b] \cdot ([c, d] \cdot [e, f]) = ([a, b] \cdot [c, d]) \cdot [e, f]$$

για κάθε $[a, b], [c, d], [e, f]$ στοιχεία του Z .

Η απόδειξη είναι απλή.

3. Ουδέτερου στοιχείου

Αν $[x, y]$ είναι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού στο Z , θα έχουμε:

$$[a, b] \cdot [x, y] = [a, b], \quad \forall [a, b] \in Z.$$

Τότε:

$$[ax + by, ay + bx] = [a, b] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax + by + b = ay + bx + a, \quad \forall a, b \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a - b)x = (a - b)y + (a - b) \quad \forall a, b \in \mathbb{N}$$

Αυτό δίνει $x = y + 1$. Επομένως το ουδέτερο στοιχείο του Z ως προς τον πολλαπλασιασμό είναι το στοιχείο

$$[x, y] = [y + 1, y] = [1, 0].$$

Πραγματικά, για κάθε $[a, b] \in Z$ έχουμε:

$$[a, b] \cdot [1, 0] = [a \cdot 1 + b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1] = [a, b]$$

4. Απορροφητικού στοιχείου

Αν $[x, y]$ είναι απορροφητικό στοιχείο ως προς τον πολλαπλασιασμό στο Z , τότε θα ισχύει:

$$[a, b] \cdot [x, y] = [x, y], \quad \forall [a, b] \in Z$$

Έτσι έχουμε:

$$[ax + by, ay + bx] = [x, y], \quad \forall a, b \in \mathbb{N} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax + by + y = ay + bx + x, \quad \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

Με $a = b = 0$ έχουμε $x = y$ και το απορροφητικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι το στοιχείο $[x, x] = [0, 0]$.

Πραγματικά,

$$[a, b] \cdot [0, 0] = [a \cdot 0 + b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 0] = [0, 0]$$

5. Επιμεριστική του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση

Για κάθε $[a, \beta], [\gamma, \delta], [\epsilon, \zeta]$ στοιχεία του Z ισχύει η σχέση:

$$[a, \beta] \cdot ([\gamma, \delta] + [\epsilon, \zeta]) = [a, \beta] \cdot [\gamma, \delta] + [a, \beta] \cdot [\epsilon, \zeta]$$

Κι αυτή η απόδειξη είναι απλή.

6. Ιδιότητα της διαγραφής

$$[a, \beta] \cdot [x, y] = [\gamma, \delta] \cdot [x, y] \Leftrightarrow [a, \beta] = [\gamma, \delta], \text{ με } [x, y] \neq [0, 0].$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} [a, \beta] \cdot [x, y] &= [\gamma, \delta] \cdot [x, y] \Leftrightarrow [ax + \beta y, ay + \beta x] = [\gamma x + \delta y, \gamma y + \delta x] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ax + \beta y + \gamma y + \delta x = ay + \beta x + \gamma x + \delta y \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a + \delta)x + (\beta + \gamma)y = (a + \delta)y + (\beta + \gamma)x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a + \delta = \beta + \gamma \Leftrightarrow [a, \beta] = [\gamma, \delta], \text{ αφού } x \neq y \end{aligned}$$

7. Αδύναμο στοιχείο

Αν $[x, y]$ είναι αδύναμο στοιχείο στο Z , τότε πρέπει να ισχύει:

$$[x, y] \cdot [x, y] = [x, y]$$

Άρα

$$[x^2 + y^2, xy + yx] = [x, y] \Leftrightarrow x^2 + y^2 + y = 2xy + x,$$

που ισχύει με $x = y$ ή $x = y + 1$.

Επομένως τα αδύναμα στοιχεία του πολλαπλασιασμού είναι τα στοιχεία

$$[x, x] = [0, 0] \text{ και } [y + 1, y] = [1, 0].$$

Από τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο Z συμπεραίνουμε ότι:

Το σύνολο $(Z, +, \cdot)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο το $[1, 0]$.

Θα δείξουμε τώρα ότι ο δακτύλιος αυτός δεν έχει διαιρέτες του μηδενός.

Έστω

$$[a, \beta], [\gamma, \delta] \in Z, \text{ με } [a, \beta] \cdot [\gamma, \delta] = [0, 0] \text{ και } [\gamma, \delta] \neq [0, 0].$$

Τότε $\gamma \neq \delta$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να δεχτούμε ότι

$$\gamma > \delta \text{ και } \gamma = \delta + \kappa \text{ με } \kappa \in N, \kappa \neq 0.$$

Από τη σχέση

$$[a, \beta] \cdot [\gamma, \delta] = [0, 0]$$

έχουμε: $[a\gamma + \beta\delta, a\delta + \beta\gamma] = [0, 0] \Leftrightarrow a\gamma + \beta\delta = a\delta + \beta\gamma$

Με $\gamma = \delta + \kappa$, γίνεται:

$$a\delta + a\kappa + \beta\delta = a\delta + \beta\delta + \beta\kappa,$$

που δίνει

$$a\kappa = \beta\kappa \text{ ή } a = \beta \Leftrightarrow [a, \beta] = 0.$$

Επομένως ο δακτύλιος $(Z, +, \cdot)$ δεν έχει διαιρέτες του μηδενός. Άρα

Η δομή $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ είναι ακέραια περιοχή.

3.5. Το \mathbb{Z} ως επέκταση του \mathbb{N}

Θεωρούμε το υποσύνολο του \mathbb{Z} που περιέχει όλα τα στοιχεία της μορφής $[κ, 0]$, δηλαδή όλα τα στοιχεία $[α, β]$ του \mathbb{Z} με $α = β + κ$, $κ \in \mathbb{N}$. Έστω

$$\bar{\mathbb{N}} = \{[κ, 0] \mid (κ, 0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}.$$

Παίρνουμε την απεικόνιση

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \bar{\mathbb{N}}, \text{ με } \varphi(κ) = [κ, 0], \quad \forall κ \in \mathbb{N}.$$

Είναι φανερό ότι η φ είναι μια απεικόνιση ένα προς ένα και επί. Ακόμα, ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} \varphi(κ + ν) &= [κ + ν, 0] = [κ, 0] + [ν, 0] = \varphi(κ) + \varphi(ν) \quad \text{και} \\ \varphi(κ \cdot ν) &= [κ \cdot ν, 0] = [κ, 0] \cdot [ν, 0] = \varphi(κ) \cdot \varphi(ν) \end{aligned}$$

Άρα τα σύνολα \mathbb{N} και $\bar{\mathbb{N}}$ είναι ισόμορφα. Αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα αυτά έχουν την ίδια κατασκευή και οι πράξεις στο \mathbb{N} μπορούν να μεταφερθούν ως αντίστοιχες πράξεις στο $\bar{\mathbb{N}}$ και αντίστροφα. Έτσι το σύνολο \mathbb{Z} έχει ένα υποσύνολο, το $\bar{\mathbb{N}}$, ισόμορφο με το \mathbb{N} κι επομένως το \mathbb{Z} είναι επέκταση του \mathbb{N} .

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μέσω του ισομορφισμού φ , τα σύνολα \mathbb{N} και $\bar{\mathbb{N}}$ ταυτίζονται. Ακριβώς για το λόγο αυτό συμφωνούμε να συμβολίζουμε τα στοιχεία του $\bar{\mathbb{N}}$ με τα αντίστοιχα στοιχεία του \mathbb{N} . Δηλαδή λόγω του ισομορφισμού $\mathbb{N} = \bar{\mathbb{N}}$, συμβολίζουμε το $[κ, 0]$ με το $κ$, $\forall κ \in \mathbb{N}$.

Αν $κ \neq 0$, συμφωνούμε να γράφουμε $[κ, 0] = {}^+κ$ και ο αριθμός αυτός ονομάζεται θετικός.

Με $κ = 0$, γράφουμε $[0, 0] = 0$ και ο αριθμός αυτός ονομάζεται μηδενικός αριθμός.

Επειδή το στοιχείο $[0, κ]$ είναι το αντίθετο του $[κ, 0]$ στο \mathbb{Z} , συμφωνούμε να το συμβολίζουμε με $-κ$ και το ονομάζουμε αντίθετο του $κ$ στο \mathbb{Z} .

Το στοιχείο $[0, κ] = -κ$, ονομάζεται αρνητικός αριθμός.

Επειδή κάθε στοιχείο $[α, β]$ του \mathbb{Z} μπορεί να γραφτεί σε μια από τις μορφές:

- (i) $[α, β] = [0, 0]$, αν $α = β$
- (ii) $[α, β] = [κ, 0]$, αν $β < α$
- (iii) $[α, β] = [0, κ]$, αν $α < β$,

τα στοιχεία του \mathbb{Z} θα είναι της μορφής $[0, 0]$, $[κ, 0]$, $[0, κ]$.

Δηλαδή τα στοιχεία του \mathbb{Z} είναι μηδενικοί, θετικοί και αρνητικοί αριθμοί.

Τα στοιχεία του \mathbb{Z} με τους νέους αυτούς συμβολισμούς θα γράφονται:

$$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad \text{ή} \quad 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Έτσι έχουμε το σύνολο: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

Το σύνολο των θετικών αριθμών $[κ, 0] = {}^+κ, κ \in \mathbb{N}^*$ το συμβολίζουμε με \mathbb{Z}_+ και το σύνολο των αρνητικών αριθμών $[0, κ] = {}^-κ, κ \in \mathbb{N}^*$ το συμβολίζουμε με \mathbb{Z}_- . Έτσι έχουμε:

$$\mathbb{Z}_+ = \{[κ, 0] / (κ, 0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, κ \neq 0\} = \{+1, +2, +3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{[0, κ] / (0, κ) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, κ \neq 0\} = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

3.6. Διάταξη στο \mathbb{Z}

Λόγω του ισομορφισμού

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \bar{\mathbb{N}}, \text{ με } \varphi(v) = [v, 0],$$

μεταφέρουμε τη διάταξη \leq του \mathbb{N} στο $\bar{\mathbb{N}}$ ως εξής:

$$[v, 0] \leq [\mu, 0] \Leftrightarrow v \leq \mu$$

Αν $(\alpha, \beta) \in [v, 0]$ και $(\gamma, \delta) \in [\mu, 0]$ με $v \leq \mu$, τότε θα έχουμε:

$$(\alpha, \beta) = (v, 0) \Leftrightarrow \alpha = \beta + v \Leftrightarrow \alpha + \delta = \beta + v + \delta$$

$$(\gamma, \delta) = (\mu, 0) \Leftrightarrow \gamma = \delta + \mu \Leftrightarrow \beta + \gamma = \beta + \delta + \mu$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι:

$$\alpha + \delta \leq \beta + \gamma, \text{ αφού } v \leq \mu$$

Επομένως, στο $\bar{\mathbb{N}}$ μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση διάταξης \leq ως εξής:

$$[\alpha, \beta] \leq [\gamma, \delta] \Leftrightarrow \alpha + \delta \leq \beta + \gamma \quad (7)$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση αυτή είναι ανεξάρτητη από τους εκπροσώπους.

Έστω $(\alpha', \beta') \in [\alpha, \beta]$ και $(\gamma', \delta') \in [\gamma, \delta]$.

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\alpha' + \delta' \leq \beta' + \gamma', \text{ όταν } \alpha + \delta \leq \beta + \gamma.$$

Έχουμε: $(\alpha', \beta') = (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \alpha' + \beta = \beta' + \alpha$

$$(\gamma', \delta') = (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \gamma' + \delta = \delta' + \gamma$$

Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι:

$$\alpha' + \beta + \delta' + \gamma = \beta' + \alpha + \gamma' + \delta,$$

που δίνει $\alpha' + \delta' \leq \beta' + \gamma', \text{ όταν } \alpha + \delta \leq \beta + \gamma$

Θα δείξουμε τώρα ότι η (7) είναι σχέση ολικής διάταξης και στο \mathbb{Z} .

Αποδείξαμε ότι η σχέση (7) είναι ανεξάρτητη από τους αντιπροσώπους, χωρίς να λάβουμε υπόψη μας τις σχέσεις $\alpha \geq \beta$ και $\gamma \geq \delta$, δηλαδή χωρίς να λάβουμε υπόψη μας ότι τα στοιχεία $[\alpha, \beta]$ και $[\gamma, \delta]$ είναι στοιχεία του $\bar{\mathbb{N}}$. Επομένως, η σχέση αυτή είναι ανεξάρτητη από τους αντιπροσώπους και στην περίπτωση που τα

στοιχεία $[α, β]$ και $[γ, δ]$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία του Z .

Η σχέση \leq , όπως ορίστηκε στην (7) είναι αυτοπαθής και αντισυμμετρική. Για να είναι ολική διάταξη στο Z , αρκεί να δείξουμε ότι είναι σχέση μεταβατική και κάθε δυο στοιχεία $[α, β], [γ, δ]$ του Z είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους ως προς τη σχέση αυτή. Θα δείξουμε τις δυο ιδιότητες:

(α) Μεταβατική

Έστω

$$[α, β] \leq [γ, δ] \wedge [γ, δ] \leq [ε, ζ].$$

Τότε:

$$\begin{aligned} α + δ &\leq β + γ \wedge γ + ζ \leq δ + ε \Rightarrow \\ \Rightarrow α + δ + γ + ζ &\leq β + γ + δ + ε \Rightarrow \\ \Rightarrow α + ζ &\leq β + ε \Rightarrow [α, β] \leq [ε, ζ]. \end{aligned}$$

(β) Ολική διάταξη στο Z

Έστω $[α, β]$ και $[γ, δ]$ δυο στοιχεία του Z . Θα δείξουμε ότι τα στοιχεία αυτά είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους ως προς τη σχέση \leq .

Θεωρούμε τα στοιχεία $α + δ, β + γ$ του N . Για τα στοιχεία αυτά ισχύει μια ακριβώς από τις σχέσεις:

$$α + δ = β + γ, \quad α + δ < β + γ, \quad β + γ < α + δ.$$

Όμως οι σχέσεις αυτές είναι ισοδύναμες, λόγω της (7), με τις σχέσεις:

$$[α, β] = [γ, δ], \quad [α, β] < [γ, δ], \quad [γ, δ] < [α, β]$$

Επομένως τα στοιχεία $[α, β]$ και $[γ, δ]$ του Z είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους ως προς τη σχέση \leq , για κάθε $[α, β]$ και $[γ, δ]$ στοιχεία του Z . Άρα η σχέση (7) είναι ολική διάταξη στο Z .

Θεωρούμε το θετικό αριθμό $[α, β] \in Z_+$. Τότε $β < α$ κι επομένως

$$κ + β < κ + α \quad \forall κ \in N.$$

Άρα $[κ, κ] < [α, β]$ από την (7)

κι επειδή $[κ, κ] = [0, 0]$, έχουμε $[0, 0] < [α, β]$.

Δηλαδή, το μηδέν είναι μικρότερο από κάθε θετικό αριθμό.

Έστω $[α, β] \in Z_-$. Τότε $α < β$ κι επομένως $α + κ < β + κ$, που δίνει λόγω της (7)

$$[α, β] < [κ, κ] = [0, 0].$$

Δηλαδή, το μηδέν είναι μεγαλύτερο από κάθε αρνητικό αριθμό.

Άρα:

Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό.

Με $[α, β] \in Z_+$, είναι $[α, β] = [κ, 0]$, με $κ \in N, κ \neq 0$.

Ενώ με $[α, β] \in Z_-$, είναι $[α, β] = [0, λ]$, με $λ \in N, λ \neq 0$.

Επειδή $[κ, 0] \leq [λ, 0] \Leftrightarrow κ + 0 \leq 0 + λ \Leftrightarrow κ \leq λ$ και

$$[0, \kappa] \leq [0, \lambda] \Leftrightarrow 0 + \lambda \leq \kappa + 0 \Leftrightarrow \lambda \leq \kappa$$

συμπεραίνουμε ότι:

Από δυο θετικούς ακέραιους αριθμούς, μεγαλύτερος είναι εκείνος που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο φυσικό αριθμό. Ενώ

Από δυο αρνητικούς ακέραιους αριθμούς, μεγαλύτερος είναι εκείνος που αντιστοιχεί στο μικρότερο φυσικό.

Για το γινόμενο δυο στοιχείων του Z έχουμε:

$$^+ \kappa \cdot ^+ \lambda = [\kappa, 0] \cdot [\lambda, 0] = [\kappa \cdot \lambda + 0, \kappa \cdot 0 + \lambda \cdot 0] \text{ (λόγω της (6))} = [\kappa \cdot \lambda, 0] \in Z_+.$$

$$^- \kappa \cdot ^- \lambda = [0, \kappa] \cdot [0, \lambda] = [0 + \kappa \cdot \lambda, 0 \cdot \lambda + \kappa \cdot 0] = [\kappa \cdot \lambda, 0] \in Z_+.$$

$$^+ \kappa \cdot ^- \lambda = [\kappa, 0] \cdot [0, \lambda] = [\kappa \cdot 0 + 0 \cdot \lambda, \kappa \cdot \lambda + 0] = [0, \kappa \cdot \lambda] \in Z_-.$$

Επομένως,

Το γινόμενο δυο θετικών αριθμών, καθώς και το γινόμενο δυο αρνητικών αριθμών είναι πάντοτε θετικός αριθμός. Ενώ το γινόμενο θετικού επί αρνητικό είναι αρνητικός αριθμός.

Ανάλογα μπορούμε να δείξουμε και άλλες ιδιότητες που ισχύουν στο Z .

Επειδή η σχέση « \leq » είναι σχέση ολικής διάταξης στο Z , και, ισχύουν συγχρόνως οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} a \leq b &\Rightarrow a + x \leq b + x \quad \forall a, b, x \in Z \quad \text{και} \\ a \leq b &\Rightarrow a \cdot x \leq b \cdot x \quad \forall a, b, x \in Z, \text{ με } x \geq 0. \end{aligned}$$

από τον ορισμό του διατεταγμένου δακτυλίου (§ 2.4) έχουμε:

Η δομή $(Z, +, \cdot)$ είναι ένας ολικά διατεταγμένος δακτύλιος ως προς τη σχέση « \leq ».

4. Κατασκευή του συνόλου Q των Ρητών

4.1. Το σύνολο Q

Στο σύνολο Z των ακεραίων μπορούμε να λύσουμε εξισώσεις της μορφής

$$x + \beta = \alpha \quad \forall \alpha, \beta \in Z$$

Έτσι το πρόβλημα αυτό, που δεν είχε λύση στο N , λύθηκε στο Z . Όμως, υπάρχουν προβλήματα που δεν μπορούν να λυθούν στο Z . Π.χ. η εξίσωση $\alpha x = \beta$ με $\alpha, \beta \in Z$, $\alpha \neq 0$ δεν έχει πάντοτε λύση στο Z . Επομένως υπάρχει ανάγκη κατασκευής ενός νέου συνόλου, Q , στο οποίο θα έχει πάντοτε λύση η εξίσωση αυτή.

Για την κατασκευή του Q θα ακολουθήσουμε μια διαδικασία ανάλογη εκείνης που ακολουθήσαμε κατά την κατασκευή του Z .

Παίρνουμε την εξίσωση:

$$\alpha x = \beta, \quad \alpha, \beta \in Z, \quad \alpha \neq 0 \quad (1)$$

Με $x \in Z$, x = σταθερό, υπάρχουν πολλά ζεύγη ακεραίων αριθμών που ικανοποιούν την (1). Κάθε τέτοιο ζεύγος το συμβολίζουμε με (α, β) .

Αν τα ζεύγη (α, β) και (γ, δ) ικανοποιούν την (1), τότε λέμε ότι τα ζεύγη αυτά είναι ισοδύναμα και τα συμβολίζουμε με

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta)$$

Αλλά, αν τα ζεύγη αυτά ικανοποιούν την εξίσωση αυτή, θα έχουμε:

$$\alpha\gamma = \beta\delta \quad \text{και} \quad \gamma\alpha = \delta\beta,$$

που δίνουν $\alpha\gamma = \beta\gamma$ και $\alpha\gamma = \alpha\delta$.

Αυτό δίνει $\alpha\delta = \beta\gamma$.

Επομένως $(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$ (2)

Στο σύνολο $Z^* \times Z$ η σχέση (2) είναι σχέση ισοδυναμίας, γιατί είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική (η απόδειξη είναι απλή). Επομένως μπορούμε να διαμερίσουμε το σύνολο $Z^* \times Z$ σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τη σχέση αυτή.

Συμβολίζουμε με $[\alpha, \beta]$ την κλάση που έχει αντιπρόσωπο το στοιχείο (α, β) του $Z^* \times Z$, και, το σύνολο πηλίκου $Z^* \times Z / \varphi$, όπου φ είναι η σχέση «=», το συμβολίζουμε με Q . Είναι δηλαδή

$$Q = Z^* \times Z / \varphi = \left\{ [\alpha, \beta] / (\alpha, \beta) \in Z^* \times Z, \alpha \neq 0 \right\}$$

Από τη σχέση (2) έχουμε ότι, αν d είναι κοινός διαιρέτης των α και β , τότε:

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d} \right).$$

Επομένως οι απλούστεροι εκπρόσωποι των κλάσεων $[\alpha, \beta]$ θα είναι:

- (i) $(\alpha, \alpha) = (1, 1)$, όταν $\alpha = \beta$
- (ii) $(\alpha, \beta) = (\kappa \cdot \beta, \beta) = (\kappa, 1)$, όταν $\alpha = \kappa \cdot \beta$, $\kappa \in Z^*$
- (iii) $(\alpha, \beta) = (\alpha, \kappa \cdot \alpha) = (1, \kappa)$, όταν $\beta = \alpha \cdot \kappa$, $\kappa \in Z$
- (iv) $(\alpha, \beta) = \left(\frac{\alpha}{d}, \frac{\beta}{d} \right)$, όπου d είναι ο Μ.Κ.Δ. των α, β .

4.2. Η πρόσθεση στο Q

Στο $Z^* \times Z$ ορίζουμε μια πράξη $+$, που την ονομάζουμε πρόσθεση, ως εξής:

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma, \beta\gamma + \alpha\delta)$$

(Βλέπε το ζεύγος (α, β) ως κλάσμα β/α).

Η πράξη αυτή είναι συμβιβαστή με τη σχέση (2), γιατί αν

$$(\alpha, \beta) = (\gamma, \delta) \quad \wedge \quad (\alpha', \beta') = (\gamma', \delta'),$$

τότε $(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\gamma, \delta) + (\gamma', \delta')$

ΑΠΟΔ.: Πράγματι αν

$$(a, \beta) = (\gamma, \delta) \text{ και } (a', \beta') = (\gamma', \delta')$$

τότε $a\delta = \beta\gamma \text{ και } a'\delta' = \beta'\gamma'$

Αλλά, $(a, \beta) + (a', \beta') = (\gamma, \delta) + (\gamma', \delta') \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a'a', a\beta' + a'\beta) = (\gamma\gamma', \gamma\delta' + \gamma'\delta) \Leftrightarrow aa'(\gamma\delta' + \gamma'\delta) = \gamma\gamma'(a\beta' + a'\beta)$$

που ισχύει πάντοτε γιατί

$$a'\delta' = \beta'\gamma' \text{ και } a\delta = \beta\gamma$$

Μπορούμε επομένως να ορίσουμε μια πράξη \oplus στο Q (σύμφωνα με τη σχέση (1) της § 3.1.), που θα την ονομάζουμε πρόσθεση, ως εξής:

$$[a, \beta] \oplus [\gamma, \delta] = [a\gamma, \beta\gamma + a\delta] \quad (3)$$

Είναι τώρα εύκολο να δείξουμε ότι η πράξη αυτή της πρόσθεσης στο Q , που θα τη συμβολίζουμε με $+$ ικανοποιεί τις ιδιότητες:

— Αντιμεταθετική,

$$[a, \beta] + [\gamma, \delta] = [\gamma, \delta] + [a, \beta] \quad \forall [a, \beta], [\gamma, \delta] \text{ στοιχεία του } Q$$

— Προσεταιριστική,

$$[a, \beta] + ([\gamma, \delta] + [\epsilon, \zeta]) = ([a, \beta] + [\gamma, \delta]) + [\epsilon, \zeta] \\ \forall [a, \beta], [\gamma, \delta], [\epsilon, \zeta] \text{ στοιχεία του } Q$$

— Όλα τα στοιχεία του Q είναι απλοποιήσιμα:

$$[a, \beta] + [x, y] = [\gamma, \delta] + [x, y] \Leftrightarrow [a, \beta] = [\gamma, \delta]$$

— Έχει ουδέτερο στοιχείο που είναι το στοιχείο $[a, 0] = [1, 0]$.

— Για κάθε $[a, \beta] \in Q$ υπάρχει αντίθετο στο Q , που είναι το στοιχείο $[a, -\beta]$.

Επομένως η δομή $(Q, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.

4.3. Ο πολλαπλασιασμός στο Q

Στο $Z^* \times Z$ ορίζουμε την πράξη \cdot , που θα την ονομάζουμε πολ/σμό με

$$(a, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (a \cdot \gamma, \beta \cdot \delta).$$

Εξετάζουμε αν η πράξη αυτή είναι συμβιβαστή με τη σχέση (2). Αν

$$(a, \beta) = (\gamma, \delta) \wedge (a', \beta') = (\gamma', \delta'),$$

τότε

$$(a, \beta) \cdot (a', \beta') = (\gamma, \delta) \cdot (\gamma', \delta') \Leftrightarrow (aa', \beta\beta') = (\gamma\gamma', \delta\delta') \Leftrightarrow aa'\delta\delta' = \beta\beta'\gamma\gamma'$$

η οποία είναι ταυτότητα, γιατί

$$a\delta = \beta\gamma \text{ και } a'\delta' = \beta'\gamma'.$$

Μπορούμε επομένως, σύμφωνα με τη σχέση (1) της παραγράφου 3.1, να ορίσουμε στο Q μια πράξη \odot που θα την ονομάζουμε πολλαπλασιασμό ως εξής:

$$[a, \beta] \odot [\gamma, \delta] = [a \cdot \gamma, \beta \cdot \delta] \quad (4)$$

Πρόταση

Να δειχτεί ότι η πράξη του πολ/σμού, όπως ορίστηκε στην (4), ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- (i) Είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.
- (ii) Είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της πρόσθεσης.
- (iii) Έχει ουδέτερο στοιχείο το $[1, 1] = [a, a]$, $a \in \mathbb{Z}^*$.
- (iv) Έχει απορροφητικό στοιχείο το $[a, 0] = [1, 0]$, $a \in \mathbb{Z}^*$.
- (v) Έχει αδύναμα στοιχεία τα $[1, 0]$ και $[1, 1]$.
- (vi) Κάθε στοιχείο $[a, \beta]$ του Q , με $[a, \beta] \neq [1, 0]$ έχει αντίστροφο στο Q , που είναι το $[\beta, a]$ και
- (vii) $[a, \beta] \cdot [x, y] = [\gamma, \delta] \cdot [x, y] \Leftrightarrow [a, \beta] = [\gamma, \delta]$, $\forall [x, y] \neq [1, 0]$.

Απόδειξη

- (i) $[a, \beta] \cdot [\gamma, \delta] = [a\gamma, \beta\delta] = [\gamma a, \delta\beta] = [\gamma, \delta] \cdot [a, \beta]$
 $[a, \beta] \cdot ([\gamma, \delta] \cdot [\epsilon, \zeta]) = [a, \beta] \cdot [\gamma\epsilon, \delta\zeta] = [a\gamma\epsilon, \beta\delta\zeta] =$
 $= [a\gamma, \beta\delta] \cdot [\epsilon, \zeta] = ([a, \beta] \cdot [\gamma, \delta]) \cdot [\epsilon, \zeta]$
- (ii) $[a, \beta] \cdot ([\gamma, \delta] + [x, y]) = [a, \beta] \cdot [\gamma x, \gamma y + \delta x] =$
 $= [a\gamma x, \beta\gamma y + \beta\delta x] = [a\gamma x, a\beta\gamma y + a\beta\delta x] = [a\gamma, \beta\delta] + [ax, \beta y] =$
 $= [a, \beta] \cdot [\gamma, \delta] + [a, \beta] \cdot [x, y]$
- (iii) Έστω $[x, y]$ το ουδέτερο στοιχείο του πολ/σμού. Τότε:
 $[a, \beta] \cdot [x, y] = [a, \beta] \quad \forall [a, \beta] \in Q$ Άρα:
 $[ax, \beta y] = [a, \beta] \Leftrightarrow a\beta x = a\beta y \quad \forall (a, \beta) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$
 άρα $x = y$ κι επομένως το ουδέτερο στοιχείο του Q είναι το στοιχείο
 $[x, x] = [1, 1]$, $x \in \mathbb{Z}^*$
- (iv) Έστω $[x, y]$ το απορροφητικό ως προς τον πολ/σμό. Τότε:
 $[a, \beta] \cdot [x, y] = [x, y] \quad \forall [a, \beta] \in Q$ Άρα:
 $[ax, \beta y] = [x, y]$ έπεται ότι $ax = \beta y \quad \forall (a, \beta) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$
 Άρα $xy = 0$ και επειδή $x \neq 0$ έπεται $y = 0$. Άρα το απορροφητικό στοιχείο είναι το
 $[x, y] = [x, 0] = [1, 0]$
- (v) Έστω $[x, y]$ αδύναμο στοιχείο του Q ως προς τον πολ/σμό. Τότε:
 $[x, y] \cdot [x, y] = [x, y] \Leftrightarrow [x^2, y^2] = [x, y] \Leftrightarrow x^2 y = y^2 x$ και έπεται
 $xy(x - y) = 0$ που δίνει ή $xy = 0$ ή $x = y$.
 Αλλά με $x \cdot y = 0$ έπεται $y = 0$ αφού $x \neq 0$.
 Επομένως τα αδύναμα στοιχεία $[x, y]$ του Q θα είναι:
 με $x = y$ το $[x, y] = [x, x] = [1, 1]$ και με $y = 0$ το $[x, y] = [x, 0] = [1, 0]$
- (vi) Έστω $[x, y]$ το αντίστροφο. Τότε:
 $[a, \beta] \cdot [x, y] = [1, 1] \Leftrightarrow [ax, \beta y] = [1, 1] \Leftrightarrow ax = \beta y$

που σημαίνει $x = \beta$ και $y = \alpha$ με $\beta \neq 0$.

Άρα το αντίστροφο του $[a, \beta]$ είναι το $[\beta, a]$ με $\beta \neq 0$ που σημαίνει ότι το $[a, \beta] \neq [1, 0]$.

(vii) $[a, \beta] \cdot [x, y] = [\gamma, \delta] \cdot [x, y] \Leftrightarrow [ax, \beta y] = [\gamma x, \delta y] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow ax\delta y = \beta y\gamma x, \quad a, x, y \neq 0$ (Μοναδικότητα αντιστροφών)
 και έπεται $a\delta = \beta\gamma$ αφού $xy \neq 0$ έπεται ότι $[a, \beta] = [\gamma, \delta]$.

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση:

$$ax = b \quad \text{με } a, b \in Q, a \neq [1, 0]$$

έχει πάντοτε λύση στο Q .

Πραγματικά, με

$$a = [a, \beta] \quad \text{και} \quad b = [\gamma, \delta]$$

έχουμε

$$[a, \beta] \cdot x = [\gamma, \delta] \Rightarrow [\beta, a] \cdot ([a, \beta] \cdot x) = [\beta, a] \cdot [\gamma, \delta] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [a\beta, a\beta] \cdot x = [\beta\gamma, a\delta] \Leftrightarrow [1, 1] \cdot x = [\beta\gamma, a\delta] \Leftrightarrow x = [\beta\gamma, a\delta]$$

Από όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι:

Η δομή $(Q, +, \cdot)$ είναι αντιμεταθετικός δακτύλιος με διαίρεση και με μοναδιαίο στοιχείο το $[1, 1]$.

Επίσης προκύπτει ότι η δομή $(Q, +, \cdot)$ δεν έχει διαιρέτες του μηδενός.

Πραγματικά, έστω

$$[a, \beta], [\gamma, \delta] \in Q, \quad \text{με}$$

$$[a, \beta] \cdot [\gamma, \delta] = [1, 0] \quad \text{και} \quad [a, \beta] \neq [1, 0].$$

Τότε το $[a, \beta]$ θα έχει αντίστροφο το $[\beta, a]$ (βλέπε πρόταση (vi)).

Έτσι έχουμε:

$$[\beta, a] \cdot [a, \beta] \cdot [\gamma, \delta] = [\beta, a] \cdot [1, 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\beta a, a\beta] \cdot [\gamma, \delta] = [\beta, 0] = [1, 0] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [1, 1] \cdot [\gamma, \delta] = [1, 0] \Leftrightarrow [\gamma, \delta] = [1, 0]$$

Επομένως,

Ο δακτύλιος $(Q, +, \cdot)$ είναι σώμα.

4.4. Το Q ως επέκταση του Z .

Παίρνουμε το υποσύνολο \bar{Z} του Q με

$$\bar{Z} = \{[1, \kappa] / \kappa \in Z\} \subset Q$$

Θεωρούμε τη σχέση

$$\varphi: Z \rightarrow \bar{Z}, \quad \text{με } \varphi(\kappa) = [1, \kappa]$$

Είναι φανερό ότι η σχέση αυτή είναι μια απεικόνιση του Z στο \bar{Z} και είναι ένα προς ένα και επί. Ακόμα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\varphi(\kappa + \lambda) = [1, \kappa + \lambda] = [1, \kappa] + [1, \lambda] = \varphi(\kappa) + \varphi(\lambda) \quad (\text{βλ. 3})$$

$$\varphi(\kappa \cdot \lambda) = [1, \kappa \cdot \lambda] = [1, \kappa] \cdot [1, \lambda] = \varphi(\kappa) \cdot \varphi(\lambda) \quad (\text{βλ. 4})$$

Άρα η φ είναι ισομορφισμός και τα σύνολα Z και \bar{Z} είναι ισόμορφα. Επομένως, Το σύνολο Q είναι επέκταση του Z , αφού έχει ένα υποσύνολο, το \bar{Z} , ισόμορφο με το Z .

Λόγω του ισομορφισμού $Z = \bar{Z}$ συμβολίζουμε το στοιχείο $[1, \kappa]$ του \bar{Z} , με κ , $\forall \kappa \in Z$.

Επίσης συμβολίζουμε το στοιχείο

$$[a, \beta] \text{ του } Q \text{ με } \frac{\beta}{a} \quad \forall a, \beta \in Z, \quad a \neq 0.$$

Τέλος με τον ισομορφισμό φ μπορούμε να μεταφέρουμε τη διάταξη « \leq » του Z στο \bar{Z} ως εξής:

$$\kappa \leq \lambda \Leftrightarrow [1, \kappa] \leq [1, \lambda], \quad \forall \kappa, \lambda \in Z$$

Έστω $(a, \beta) \in [1, \kappa]$ και $(\gamma, \delta) \in [1, \lambda]$.

Τότε έχουμε:

$$(a, \beta) = (1, \kappa) \Leftrightarrow \beta = a \cdot \kappa \Leftrightarrow \beta \cdot \gamma = a\gamma\kappa \quad (1)$$

$$(\gamma, \delta) = (1, \lambda) \Leftrightarrow \delta = \gamma \cdot \lambda \Leftrightarrow a \cdot \delta = a\gamma\lambda \quad (2)$$

Από τις σχέσεις αυτές με $\kappa \leq \lambda$ παίρνουμε διαδοχικά τα εξής:

$$\text{Αν } a\gamma \leq 0 \text{ και } \kappa \leq \lambda, \text{ τότε } a\gamma\lambda \leq a\gamma\kappa \Leftrightarrow a\delta \leq \beta\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\delta - \beta\gamma \leq 0 \Leftrightarrow a\gamma \cdot (\beta\gamma - a\delta) \leq 0$$

$$\text{Αν } 0 \leq a\gamma \text{ και } \kappa \leq \lambda, \text{ τότε } a\gamma\kappa \leq a\gamma\lambda \Leftrightarrow \beta\gamma \leq a\delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta\gamma - a\delta \leq 0 \Leftrightarrow a\gamma \cdot (\beta\gamma - a\delta) \leq 0$$

$$\text{Οι σχέσεις (1) και (2) δίνουν πάντοτε τη σχέση } a\gamma \cdot (\beta\gamma - a\delta) \leq 0$$

Επομένως έχουμε τη σχέση:

$$[a, \beta] \leq [\gamma, \delta] \Leftrightarrow a\gamma \cdot (\beta\gamma - a\delta) \leq 0 \quad (3)$$

που είναι επέκταση της σχέσης « \leq » στο Z , γιατί

$$[1, \kappa] \leq [1, \lambda] \Leftrightarrow 1 \cdot (\kappa - \lambda) \leq 0 \Leftrightarrow \kappa \leq \lambda.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η σχέση (3) είναι σχέση ολικής διάταξης στο Q .

Πραγματικά, η σχέση « \leq » όπως ορίστηκε στην (3) είναι:

Αυτοπαθής, γιατί

$$[a, \beta] \leq [a, \beta] \Leftrightarrow a^2(a\beta - \beta a) \leq 0,$$

που ισχύει πάντοτε η ισότητα.

Αντισυμμετρική, γιατί οι

$$[a, \beta] \leq [\gamma, \delta] \text{ και } [\gamma, \delta] \leq [a, \beta]$$

δίνουν

$$a\gamma(\beta\gamma - a\delta) \leq 0 \text{ και } a\gamma(a\delta - \beta\gamma) \leq 0.$$

$$\text{Άρα } a\gamma(\beta\gamma - a\delta) = 0$$

και επειδή $a\gamma \neq 0$, θα είναι $\beta\gamma = a\delta$, που δίνει $[a, \beta] = [\gamma, \delta]$.

Μεταβατική, γιατί οι

$$[a, \beta] \leq [\gamma, \delta] \text{ και } [\gamma, \delta] \leq [\mu, \nu]$$

δίνουν

$$a\gamma(\beta\gamma - a\delta) \leq 0 \text{ και } \gamma\mu(\delta\mu - \gamma\nu) \leq 0 \quad \text{ή}$$

$$αβγ^2 \leq α^2γδ \text{ και } γδμ^2 \leq γ^2μν.$$

Άρα (επειδή $μ \neq 0$) έχουμε:

$$αβγ^2μ^2 \leq α^2γδμ^2 \leq α^2γ^2μν,$$

που δίνει

$$αβμ^2 \leq α^2μν \text{ ή } αμ(βμ - αν) \leq 0 \Leftrightarrow [α, β] \leq [μ, ν]$$

Άρα η σχέση « \leq » είναι σχέση διάταξης στο Q .

Θα δείξουμε τώρα ότι δυο τυχαία στοιχεία $[α, β]$ και $[γ, δ]$ του Q είναι συγκρίσιμα μεταξύ τους.

Πραγματικά, επειδή $αγ(βγ - αδ)$ είναι ένα στοιχείο του Z , θα ισχύει ακριβώς μια από τις παρακάτω σχέσεις:

$$αγ(βγ - αδ) < 0, \quad αγ(βγ - αδ) = 0, \quad 0 < αγ(βγ - αδ).$$

Οι σχέσεις αυτές είναι ισοδύναμες με τις σχέσεις:

$$[α, β] < [γ, δ], \quad [α, β] = [γ, δ], \quad \text{και} \quad [γ, δ] < [α, β]$$

αντίστοιχα. Επομένως τα τυχαία στοιχεία $[α, β], [γ, δ]$ του Q ικανοποιούν τη συνθήκη της τριχοτομίας, και η σχέση « \leq », όπως ορίστηκε στην (3), είναι ολική διάταξη στο Q .

Πρόταση

Αν $[α, β], [γ, δ]$ και $[x, y]$ είναι στοιχεία του Q , τότε έχουμε:

$$(i) \quad [α, β] \leq [γ, δ] \Leftrightarrow [α, β] + [x, y] \leq [γ, δ] + [x, y].$$

$$(ii) \quad [1, 0] \leq [x, y] \Leftrightarrow 0 \leq x \cdot y.$$

$$(iii) \quad [α, β] \leq [γ, δ] \Leftrightarrow [α, β] \cdot [x, y] \leq [γ, δ] \cdot [x, y], \text{ με } [1, 0] < [x, y].$$

Απόδειξη

$$(i) \quad [α, β] + [x, y] \leq [γ, δ] + [x, y] \Leftrightarrow [αx, αy + βx] \leq [γx, γy + δx] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow αγx^2(αγxy + βγx^2 - αγxy - αδx^2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow αγ(βγ - αδ) \leq 0 \Leftrightarrow [α, β] \leq [γ, δ].$$

$$(ii) \quad [1, 0] \leq [x, y] \Leftrightarrow 1 \cdot x (0 \cdot x - 1 \cdot y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq xy.$$

$$(iii) \quad \text{Επειδή } [1, 0] < [x, y], \text{ θα είναι } 0 < xy, \text{ από την (ii).}$$

Επομένως

$$[α, β] \leq [γ, δ] \Leftrightarrow αγ(βγ - αδ) \leq 0 \Leftrightarrow αγx^2(βγxy - αδxy) \leq 0$$

$$(\text{αφού } x \neq 0 \text{ και } 0 < xy) \Leftrightarrow [αx, βy] \leq [γx, δy] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [α, β] \cdot [x, y] \leq [γ, δ] \cdot [x, y].$$

Από την πρόταση αυτή και τον ορισμό της § 2.4. έχουμε ότι:

Το σώμα $(Q, +, \cdot)$ είναι ολικά διατεταγμένο ως προς τη σχέση « \leq », όπως ορίζεται στη σχέση (3).

Άσκηση

Για κάθε $α, β \in Z$, με $α \neq 0$, να δείξετε ότι:

$$(i) \quad [1, 0] \leq [α, α] \text{ και}$$

$$(ii) \quad [α, β] \leq [1, 0] \Leftrightarrow α \cdot β \leq 0.$$

Η απόδειξη προκύπτει αμέσως με εφαρμογή της σχέσης (3).

5. Κατασκευή του συνόλου \mathbb{R} των Πραγματικών αριθμών

5.1. Εισαγωγικά

Στο σώμα \mathbb{Q} , που κατασκευάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να λύσουμε κάθε εξίσωση της μορφής $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{Q}$, καθώς και κάθε εξίσωση της μορφής $ax = b$ με $a, b \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Όμως, υπάρχουν προβλήματα που είναι καταδικασμένα να μείνουν άλυτα, αν περιοριστούμε μόνο σε όρους του συστήματος \mathbb{Q} . Η εξίσωση $x^2 - 2 = 0$, για παράδειγμα, δεν έχει λύση στο \mathbb{Q} . Επίσης η εξίσωση $x^n - a = 0$, $a \in \mathbb{Q}$, καθώς και η πολωνομική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ με a_0, a_1, \dots, a_n στοιχεία του \mathbb{Q} δεν έχουν πάντοτε λύση στο \mathbb{Q} .

Πολλές από τις παραπάνω εξισώσεις και μάλιστα εξισώσεις της μορφής $x^n - a = 0$ με $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$ μπορούν να λυθούν «κατά προσέγγιση». Γιατί, για κάθε $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, υπάρχει πάντοτε $x \in \mathbb{Q}$ τέτοιο, ώστε η διαφορά $|x^n - a|$ να είναι όσο θέλουμε μικρή.

Ας ξεκινήσουμε, για παράδειγμα, από την εξίσωση:

$$x^2 - 2 = 0 \quad (1)$$

Η εξίσωση αυτή δεν έχει λύση στο \mathbb{Q} , αφού δεν υπάρχει ρητός αριθμός που να την ικανοποιεί. Θα λύσουμε την εξίσωση «κατά προσέγγιση».

Όπως είναι γνωστό από τον καθορισμό της τετραγωνικής ρίζας έχουμε:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots$$

Επομένως, ρίζες «κατά προσέγγιση» της (1) μπορούν να είναι οι παρακάτω ρητοί αριθμοί:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1,4, \quad x_2 = 1,41, \quad x_3 = 1,414, \quad x_4 = 1,4142, \quad x_5 = 1,41421, \dots, \\ x_n = 1,41421356a_1a_2\dots a_n \text{ με } a_0, a_1, \dots, a_n \text{ στοιχεία του } \mathbb{N}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$x_0^2 = 1$	$x_1 - x_0 = 0,4$
$x_1^2 = 1,96$	$x_2 - x_1 = 0,01$
$x_2^2 = 1,9881$	$x_3 - x_2 = 0,004$
$x_3^2 = 1,999396$	$x_4 - x_3 = 0,0002$
$x_4^2 = 1,99986164$	$x_5 - x_4 = 0,00001$
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots
\vdots	\vdots

Δηλαδή η διαφορά $|x^2 - 2|$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή θέλουμε, όταν το x πάρει τις τιμές $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Επίσης οι διαφορές $|x_m - x_n|$ με κατάλληλα m και n μπορούν να γίνουν μικρότερες από οποιονδήποτε θετικό ρητό αριθμό ε , οσοδήποτε μικρό. Επομένως, οι «κατά προσέγγιση» ρίζες της (1) σχηματίζουν μια ακολουθία ρητών αριθμών (x_n) που έχει την ιδιότητα:

Για κάθε θετικό ρητό αριθμό ε , θα υπάρχει ένας δείκτης n_0 που θα εξαρτάται από το ε , τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$|x_\mu - x_\nu| < \varepsilon \quad \forall \mu, \nu \in \mathbb{N} \quad \text{με } \mu > \nu_0, \nu > \nu_0.$$

Μια ακολουθία αυτής της μορφής ονομάζεται **ακολουθία Cauchy**.

Έτσι, οι «κατά προσέγγιση» ρίζες της εξίσωσης (I) μας οδήγησαν στις ακολουθίες Cauchy. Το σύνολο των ακολουθιών αυτών θα χρησιμοποιήσουμε για την κατασκευή του συνόλου \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών.

Ορισμός

Μια ακολουθία (a_n) ρητών αριθμών λέγεται ακολουθία Cauchy, αν $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0$, υπάρχει δείκτης ν_0 που εξαρτάται από το ε , τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$|a_\mu - a_\nu| < \varepsilon, \quad \forall \mu, \nu \in \mathbb{N}, \quad \text{με } \mu > \nu_0 \quad \text{και } \nu > \nu_0$$

Έστω A το σύνολο των ακολουθιών Cauchy ρητών αριθμών. Τότε έχουμε:

Πρόταση 5.1.

Το σύνολο A δεν είναι κενό.

Απόδειξη

Αν (a_n) , με $a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Q}$, είναι μια σταθερή ακολουθία ρητών αριθμών, είναι φανερό ότι η ακολουθία αυτή είναι ακολουθία Cauchy.

Επίσης, αν (a_n) είναι μια συγκλίνουσα ακολουθία ρητών αριθμών με όριο το $a \in \mathbb{Q}$, τότε για κάθε $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ με $\varepsilon > 0$ θα υπάρχει δείκτης ν_0 που θα εξαρτάται από το ε , τέτοιος ώστε να ισχύουν συγχρόνως:

$$|a_\mu - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \mu > \nu_0 \quad \text{και} \quad |a_\nu - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall \nu > \nu_0. \quad \text{Άρα}$$

$$|a_\mu - a_\nu| = |(a_\mu - a) + (a - a_\nu)| \leq |a_\mu - a| + |a_\nu - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Επομένως,

Κάθε σταθερή ακολουθία ρητών αριθμών και κάθε συγκλίνουσα ακολουθία ρητών αριθμών με όριο το $a \in \mathbb{Q}$, είναι ακολουθία Cauchy και άρα το σύνολο A δεν είναι κενό.

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι μια ακολουθία Cauchy ρητών αριθμών δεν συγκλίνει πάντοτε στο \mathbb{Q} .

Στο σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών που θα κατασκευάσουμε παρακάτω, κάθε ακολουθία Cauchy πραγματικών αριθμών συγκλίνει στο \mathbb{R} .

Πριν κατασκευάσουμε το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών θα δώσουμε την παρακάτω πρόταση 5.2., η οποία περιέχει όλες τις ιδιότητες ακολουθιών Cauchy ρητών αριθμών, που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα. Η απόδειξη της πρότασης αυτής είναι απλή και μπορεί να βρεθεί σε όλα σχεδόν τα βιβλία Ανάλυσης.

Πρόταση 5.2.

(i) Αν (a_n) είναι ακολουθία Cauchy, τότε:

- $H(a_n)$ είναι φραγμένη.
- $H(-a_n)$ και $H(|a_n|)$ είναι ακολουθίες Cauchy.
- $H(b_n)$ είναι ακολουθία Cauchy, για κάθε (b_n) υπακολουθία της (a_n) .

- (ii) Αν (a_n) είναι μη μηδενική ακολουθία Cauchy, τότε:
- Υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}$ και $a \in \mathbb{Q}$, $a > 0$, τέτοια, ώστε:
 $|a_n| > a, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ με } n > n_0.$
 - Οι όροι της (a_n) με $n > n_0$ είναι διάφοροι του μηδενός.
 - Η ακολουθία $\left(\frac{1}{a_n}\right), n > n_0$ είναι ακολουθία Cauchy.
 - Υπάρχει δείκτης $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιος, ώστε όλοι οι όροι της (a_n) με $n > n_1$ είναι ομόσημοι.
- (iii) Αν (a_n) και (b_n) είναι ακολουθίες Cauchy, τότε και οι ακολουθίες:
- $$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n) \quad \text{και} \quad (a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$$
- είναι ακολουθίες Cauchy.

5.2. Το σύνολο \mathbb{R} των Πραγματικών αριθμών

Παίρνουμε το σύνολο A των ακολουθιών Cauchy ρητών αριθμών και ορίζουμε μια σχέση φ , που θα την συμβολίζουμε με \equiv , ως εξής:

$$(a_n) \equiv (b_n) \Leftrightarrow (a_n - b_n) \rightarrow 0 \quad (2)$$

Πρόταση 5.3.

Η σχέση \equiv όπως ορίστηκε στην (2) είναι σχέση ισοδυναμίας.

Απόδειξη

Είναι αυτοπαθής, γιατί $\forall (a_n) \in A$ ισχύει $(a_n - a_n) = 0$.

Είναι συμμετρική, γιατί $(a_n) \equiv (b_n) \Leftrightarrow (a_n - b_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow (b_n - a_n) \rightarrow 0 \Leftrightarrow (b_n) \equiv (a_n)$.

Είναι μεταβατική, γιατί αν $(a_n) \equiv (b_n)$ και $(b_n) \equiv (c_n)$, τότε

$$(a_n - b_n) \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad (b_n - c_n) \rightarrow 0,$$

που συνεπάγεται ότι και

$$(a_n - b_n) + (b_n - c_n) = (a_n - c_n) \rightarrow 0.$$

Άρα: $(a_n) \equiv (c_n)$.

Μπορούμε επομένως να διαμερίσουμε το σύνολο A σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς τη σχέση \equiv .

Συμβολίζουμε με $[a_n]$ την κλάση του A που περιέχει την ακολουθία (a_n) και όλες τις ισοδύναμές της. Δηλαδή

$$[a_n] = \{(x_n) \in A \mid (x_n) \equiv (a_n)\}$$

Το σύνολο όλων αυτών των κλάσεων, που είναι το σύνολο πηλίκο A/φ , το συμβολίζουμε με \mathbb{R} και τα στοιχεία του τα ονομάζουμε πραγματικούς αριθμούς.

Έτσι έχουμε:

$$\mathbb{R} = A/\varphi = \{[a_n] \mid (a_n) \in A\}.$$

Αν $(x_n), (y_n)$ είναι δυο στοιχεία του A που ανήκουν στην ίδια κλάση $[a_n]$ και

$$(x_n) \rightarrow a, a \in \mathbb{Q}, \quad \text{τότε} \quad (x_n - a) \rightarrow 0.$$

Επειδή $(x_n), (y_n)$ είναι στοιχεία της κλάσης $[a_n]$, θα είναι $(x_n) \equiv (y_n)$ και επομένως

$$(y_n - x_n) \rightarrow 0 \text{ και } (y_n - x_n) + (x_n - a) = (y_n - a) \rightarrow 0.$$

$$\text{Άρα: } (y_n) \rightarrow a.$$

Δηλαδή αν η ακολουθία (x_n) της $[a_n]$ συγκλίνει προς ένα ρητό αριθμό a , τότε κάθε ακολουθία (y_n) της $[a_n]$ συγκλίνει στον a .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι (x_n) και (y_n) είναι δυο ακολουθίες ρητών αριθμών που έχουν κοινό όριο τον αριθμό a , με $a \in \mathbb{Q}$. Τότε οι ακολουθίες αυτές είναι ακολουθίες Cauchy και

$$(x_n - a) \rightarrow 0, (y_n - a) \rightarrow 0 \Rightarrow (a - y_n) \rightarrow 0.$$

$$\text{Άρα } (x_n - a) + (a - y_n) = (x_n - y_n) \rightarrow 0,$$

$$\text{που δίνει } (x_n) = (y_n).$$

Έτσι έχουμε ότι:

Δυο ακολουθίες ρητών αριθμών που συγκλίνουν στον ίδιο ρητό αριθμό a , είναι ακολουθίες Cauchy και ανήκουν στην ίδια κλάση.

Επειδή για κάθε ρητό αριθμό a , η σταθερή ακολουθία

$$(a_n), a_n = a \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ συγκλίνει στο } a,$$

έπεται ότι:

$$[a_n] = [a] \quad \forall (a_n) \in A, \text{ με } (a_n) \rightarrow a.$$

Στα επόμενα θα ορίσουμε πράξεις στο σύνολο $R = A/\varphi$ με τη βοήθεια των αντίστοιχων πράξεων στο A .

5.3. Η πρόσθεση στο R .

Στο A ορίζουμε τη γνωστή πράξη της πρόσθεσης ακολουθιών με

$$(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n), \quad \forall (a_n), (b_n) \in A \quad (3)$$

Θα δείξουμε ότι η πράξη αυτή είναι συμβιβαστή με τη σχέση (2).

Πραγματικά αν

$$(a_n) \equiv (a'_n) \text{ και } (b_n) \equiv (b'_n), \text{ τότε}$$

$$(a_n - a'_n) \rightarrow 0 \text{ και } (b_n - b'_n) \rightarrow 0,$$

που δίνουν

$$(a_n - a'_n) + (b_n - b'_n) = ((a_n + b_n) - (a'_n + b'_n)) \rightarrow 0$$

και επομένως

$$(a_n + b_n) \equiv (a'_n + b'_n) \text{ ή } (a_n) + (b_n) \equiv (a'_n) + (b'_n).$$

Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε στο $A/\varphi = R$ μια πράξη πρόσθεσης, που θα τη συμβολίζουμε και αυτή με $+$, ως εξής:

$$[a_n] + [b_n] = [a_n + b_n], \quad \forall [a_n], [b_n] \in R \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των ακολουθιών είναι εύκολο να δείξουμε ότι ισχύει η πρόταση:

Πρόταση 5.4.

Στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών, να δείξετε ότι η πράξη της πρόσθεσης $+$, που ορίζεται από τη σχέση (4), ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- (i) Είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.
- (ii) Έχει ουδέτερο στοιχείο το $[0_n] = [0]$.

(iii) Για κάθε στοιχείο $[a_n]$ του R , υπάρχει στοιχείο $[b_n] = [-a_n]$ του R τέτοιο, ώστε $[a_n] + [b_n] = [0]$.

Το στοιχείο $[-a_n]$ λέγεται συμμετρικό του $[a_n]$ ως προς την πρόσθεση ή αντίθετο στοιχείο του $[a_n]$ στο R .

(iv) Αν $[a_n], [b_n], [x_n]$ είναι στοιχεία του R , τότε ισχύει πάντοτε η σχέση $[a_n] = [b_n] \Leftrightarrow [a_n] + [x_n] = [b_n] + [x_n]$.

Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Η δομή $(R, +)$ είναι αβελιανή ομάδα.

5.4. Ο πολλαπλασιασμός στο R

Στο σύνολο A των ακολουθιών Cauchy ρητών αριθμών ορίζουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού \cdot κατά το γνωστό τρόπο του πολλαπλασιασμού ακολουθιών. Δηλαδή

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n), \quad \forall (a_n), (b_n) \in A.$$

Η πράξη αυτή είναι συμβιβαστή με τη σχέση (2), γιατί, αν

$$(a_n) = (a'_n) \quad \text{και} \quad (b_n) = (b'_n),$$

$$\text{τότε} \quad (a_n - a'_n) \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad (b_n - b'_n) \rightarrow 0.$$

Επειδή οι ακολουθίες (a'_n) και (b'_n) ως ακολουθίες Cauchy είναι φραγμένες (πρόταση 1 (i)), έπεται ότι οι ακολουθίες:

$$(a_n - a'_n)(b_n) \quad \text{και} \quad (b_n - b'_n)(a_n)$$

είναι μηδενικές ακολουθίες. Άρα και η ακολουθία

$$(a_n b_n - a'_n b'_n) = (a_n - a'_n)(b_n) + (b_n - b'_n)(a_n)$$

είναι μηδενική. Αυτό δίνει ότι:

$$(a_n \cdot b_n) = (a'_n \cdot b'_n) \quad \text{ή} \quad (a_n) \cdot (b_n) = (a'_n) \cdot (b'_n).$$

Επομένως στο $R = A/\varphi$ μπορούμε να ορίσουμε μια πράξη πολλαπλασιασμού, που θα τη συμβολίζουμε και αυτή με \cdot , ως εξής:

$$[a_n] \cdot [b_n] = [a_n \cdot b_n], \quad \forall [a_n], [b_n] \in R \quad (5)$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ακολουθιών και της πρότασης 5.2. είναι εύκολο να δειχτεί ότι ισχύει η πρόταση:

Πρόταση 5.5.

Αν στο σύνολο R των πραγματικών αριθμών ορίσουμε την πράξη του πολλαπλασιασμού όπως δίνεται στη σχέση (5), να δείξετε ότι η πράξη αυτή ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- Είναι αντιμεταθετική και προσεταιριστική.
- Είναι επιμεριστική ως προς την πράξη της πρόσθεσης.
- Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη αυτή, που είναι το στοιχείο $[1]$.
- Υπάρχει απορροφητικό στοιχείο ως προς την πράξη αυτή, που είναι το στοιχείο $[0]$.
- Υπάρχουν δύο αδύναμα στοιχεία στο R , που είναι τα στοιχεία $[0]$ και $[1]$.

(vi) Για κάθε στοιχείο $[a_v]$ του R , με $[a_v] \neq [0]$, υπάρχει στοιχείο $[x_v]$ στο R τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$[a_v] \cdot [x_v] = [1]$$

Το στοιχείο $[x_v]$ του R λέγεται συμμετρικό στοιχείο του $[a_v]$ στο R ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού ή αντίστροφο του $[a_v]$ στο R .

(vii) Αν $[a_v], [b_v], [x_v]$ είναι στοιχεία του R με $[x_v] \neq [0]$, τότε ισχύει η σχέση $[a_v] = [b_v] \Leftrightarrow [a_v] \cdot [x_v] = [b_v] \cdot [x_v]$.

Απ' όλα τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Η δομή $(R, +, \cdot)$ είναι σώμα με μηδενικό στοιχείο το $[0]$ και μοναδιαίο το $[1]$.

5.5. Το R ως επέκταση του Q .

Θεωρούμε το σύνολο

$$\bar{Q} = \{[a] \mid a \in Q\} \subseteq R$$

Αν $[x], [y]$ είναι στοιχεία του \bar{Q} , τότε και τα στοιχεία

$$[x] + [-y] = [x - y] \quad \text{και} \quad [x] \cdot \frac{1}{[y]} = [x] \cdot [y^{-1}] = [x \cdot y^{-1}]$$

με $y \neq 0$, είναι στοιχεία του \bar{Q} .

Άρα η δομή $(\bar{Q}, +, \cdot)$ είναι σώμα, υπόσωμα του R .

Παίρνουμε τη σχέση:

$$\varphi: Q \rightarrow \bar{Q}, \quad \text{με } \varphi(a) = [a]$$

Είναι φανερό ότι η φ είναι μια απεικόνιση του Q επί του \bar{Q} .

Με $x, y \in Q$ και $x \neq y$, θα είναι και $[x] \neq [y]$.

Επομένως με $x, y \in Q$, $x \neq y$ θα είναι και $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Άρα η φ είναι μια απεικόνιση ένα προς ένα.

Για κάθε $x, y \in Q$ έχουμε:

$$\varphi(x + y) = [x + y] = [x] + [y] = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{και}$$

$$\varphi(x \cdot y) = [x \cdot y] = [x] \cdot [y] = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Άρα η φ είναι ισομορφισμός και τα σώματα Q και \bar{Q} είναι ισόμορφα. Αυτό σημαίνει ότι οι πράξεις του Q μπορούν να μεταφερθούν σε πράξεις στο \bar{Q} και αντίστροφα.

Επομένως το σώμα R είναι επέκταση του Q , αφού έχει ένα υπόσωμα, το \bar{Q} , που είναι ισόμορφο με το Q .

Μέσω του ισομορφισμού φ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα σώματα Q και \bar{Q} ταυτίζονται και να συμβολίζουμε το στοιχείο $[x]$ του \bar{Q} με το αντίστοιχο του στοιχείο x του Q , $\forall x \in Q$. Επίσης, λόγω του ισομορφισμού φ μπορούμε να μεταφέρουμε τη διάταξη \leq του Q στο \bar{Q} ως εξής:

$$[x] \leq [y] \Leftrightarrow x \leq y$$

$$\text{Άρα } x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq y - x \Leftrightarrow [0] \leq [y - x].$$

Έστω $[a_v]$ ένα στοιχείο του R με $[a_v] \neq [0]$. Τότε κάθε ακολουθία (x_v) του $[a_v]$ είναι μη μηδενική και σύμφωνα με την πρόταση 5.2, θα υπάρχει κάποιος δείκτης $v_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος, ώστε όλοι οι όροι της (x_v) με $v > v_0$ να είναι ομόσημοι. Επομέ-

νως, αν θεωρήσουμε δυο στοιχεία $(x_n), (y_n)$ του $[a_n]$, τότε οι ακολουθίες (x_n) και (y_n) είναι μη μηδενικές και θα υπάρχουν δείκτες $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_2 \in \mathbb{N}$ και ρητοί αριθμοί $x > 0$ και $y > 0$ τέτοιοι, ώστε να ισχύουν:

$$|x_n| \geq x \quad \forall n > n_1 \quad \text{και} \quad |y_n| \geq y \quad \forall n > n_2 \quad (\text{πρόταση 5.2})$$

Επειδή

$$(x_n) \in [a_n] \quad \text{και} \quad (y_n) \in [a_n],$$

θα είναι

$$(x_n) = (y_n) \quad \text{και} \quad (x_n - y_n) \rightarrow 0.$$

Άρα με $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ θα έχουμε ότι $\forall n > n_0$ οι όροι της (x_n) θα είναι θετικοί (αντίστοιχα αρνητικοί).

Επομένως τη διάταξη « \leq » που ορίστηκε στο \bar{Q} μπορούμε να την επεκτείνουμε σε διάταξη στο \mathbb{R} ως εξής:

Στο σώμα \mathbb{R} ορίζουμε τη σχέση « \leq » με

$$[0] < [a_n] \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad a \in \mathbb{Q}, a > 0: a_n > a \quad \forall n > n_0$$

$$[a_n] \leq [\beta_n] \Leftrightarrow [0] \leq [\beta_n - a_n]$$

Είναι φανερό ότι η σχέση αυτή είναι μια επέκταση της αντίστοιχης σχέσης στο \bar{Q} . Θα δείξουμε ότι είναι σχέση ολικής διάταξης στο \mathbb{R} .

Πραγματικά η σχέση αυτή είναι:

Αυτοπαθής, γιατί

$$[a_n] \leq [a_n] \Leftrightarrow [0] \leq [a_n - a_n] = [0]$$

Αντισυμμετρική, γιατί, αν

$$[a_n] \leq [\beta_n] \quad \text{και} \quad [\beta_n] \leq [a_n]$$

τότε

$$[0] \leq [\beta_n - a_n] \quad \text{και} \quad [0] \leq [a_n - \beta_n].$$

Αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος, ώστε να ισχύει:

$$a_n - \beta_n \geq 0 \quad \text{και} \quad \beta_n - a_n \geq 0 \quad \forall n > n_0.$$

Άρα $a_n - \beta_n = 0 \quad \forall n > n_0$, που δίνει $[a_n] = [\beta_n]$.

Μεταβατική, γιατί, αν

$$[a_n] \leq [\beta_n] \quad \text{και} \quad [\beta_n] \leq [\gamma_n],$$

τότε

$$[0] \leq [\beta_n - a_n] \quad \text{και} \quad [0] \leq [\gamma_n - \beta_n].$$

Άρα θα υπάρχει δείκτης $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος, ώστε $\forall n > n_0$ να ισχύουν οι σχέσεις:

$$0 \leq \beta_n - a_n \quad \text{και} \quad 0 \leq \gamma_n - \beta_n.$$

Άρα $0 \leq \gamma_n - a_n \quad \forall n > n_0$, που δίνει $[0] \leq [\gamma_n - a_n]$ ή $[a_n] \leq [\gamma_n]$.

Επομένως η σχέση « \leq », όπως ορίστηκε παραπάνω, είναι σχέση διάταξης στο \mathbb{R} .

Επειδή

$$[0] \leq [a_n - \beta_n] \quad \text{ή} \quad [0] < [\beta_n - a_n] \quad \forall [a_n], [\beta_n] \quad \text{στο} \quad \mathbb{R},$$

έπεται ότι:

$$[\beta_n] \leq [a_n] \quad \text{ή} \quad [a_n] < [\beta_n]$$

για κάθε $[a_n], [\beta_n]$ στοιχεία του \mathbb{R} .

Άρα η σχέση « \leq » είναι ολική διάταξη στο \mathbb{R} .

Πρόταση 5.6.

Αν $[a_v], [b_v], [x_v]$ είναι στοιχεία του R , να δειχτεί ότι ισχύουν οι σχέσεις:

- (i) $[a_v] \leq [b_v] \Leftrightarrow [a_v] + [x_v] \leq [b_v] + [x_v]$ και
 (ii) $[a_v] \leq [b_v]$ και $[0] \leq [x_v] \Rightarrow [a_v] \cdot [x_v] \leq [b_v] \cdot [x_v]$

Απόδειξη

- (i) $[a_v] \leq [b_v] \Leftrightarrow [0] \leq [b_v - a_v] = [b_v + x_v - a_v - x_v] \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow [a_v + x_v] \leq [b_v + x_v] \Leftrightarrow [a_v] + [x_v] \leq [b_v] + [x_v].$

- (ii) Με $[0] = [x_v]$ ισχύει η ισότητα.

Δεχόμαστε ότι $[0] < [x_v]$. Τότε

$$[0] \leq [b_v - a_v] \text{ και } [0] < [x_v]$$

δίνουν

$$0 \leq b_v - a_v \text{ και } 0 < x_v \quad \forall v > v_0,$$

όπου v_0 είναι ένας κατάλληλος δείκτης που πάντοτε υπάρχει (πρόταση 5.2.). Άρα

$$0 \leq (b_v - a_v) x_v = (b_v x_v - a_v x_v) \quad \forall v > v_0.$$

Αυτό δίνει

$$[0] \leq [b_v x_v - a_v x_v] \Leftrightarrow [a_v x_v] \leq [b_v x_v] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [a_v] \cdot [x_v] \leq [b_v] \cdot [x_v].$$

Από την πρόταση αυτή συμπεραίνουμε ότι, αν

$$[a_v] < [b_v], \text{ τότε}$$

$$[a_v] + [a_v] < [a_v] + [b_v] < [b_v] + [b_v] \text{ ή}$$

$$[2a_v] < [a_v] + [b_v] < [2b_v] \text{ ή } [2] \cdot [a_v] < [a_v + b_v] < [2] \cdot [b_v] \text{ ή}$$

$$[a_v] < \frac{[a_v + b_v]}{[2]} < [b_v]$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι μεταξύ των στοιχείων $[a_v]$ και $[b_v]$ του R με $[a_v] < [b_v]$ υπάρχουν άλλα άπειρα στοιχεία του R . Ένα τέτοιο σώμα λέγεται πυκνό ως προς τη διάταξη.

Απ' όλα τα παραπάνω έχουμε ότι:

Το σώμα $(R, +, \cdot)$ είναι ένα ολικά διατεταγμένο και πυκνό ως προς τη διάταξη σώμα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. T. Apostol «Διαφορικός και Ολοκληρωτικός λογισμός I και II» Blaisbell - Πεχλι-βανίδης, Αθήνα.
2. G. Birkhoff and S. MacLane "A survey of modern Algebra" Macmillan, New York (1941).
3. L. Brand «Μαθηματική Ανάλυση» Εκδόσεις E.M.E. (1984).
4. J. Dieudonne "Foundations of Modern Analysis, vol. I" Academic press (1969).

5. R. Godement "Algebra" Kershaw Publishing Company Ltd, London (1969).
6. G.H. Hardy and E.M. Wright "The Theory of Numbers" Oxford (1962).
7. Δ.Α. Κάππου «Μαθήματα Αναλύσεως, τεύχος Α'» Αθήνα (1960).
8. Ν. Κρητικού «Εισαγωγή στα Ανώτερα Μαθηματικά - Οι Πραγματικοί αριθμοί» Αθήνα (1969).
9. K. Kuratowski and A. Mostowski "Set Theory" North - Holland Publishing comp (1968).
10. Π. Μάγειρα «Εισαγωγή εις την αριθμοθεωρίαν, τόμοι Ι, ΙΙ» Αθήνα (1964-1965).
11. Ι.Δ. Μήττα «Μαθήματα Ανωτέρων Μαθηματικών» Θεσσαλονίκη 1969.
12. Α. Ντόκα «Μαθήματα Κλασικής Αναλύσεως» Τ.Ε.Ε., Αθήνα (1975).
13. Γ.Ν. Παντελίδης «Μαθηματική Ανάλυση, τόμος Ι» Αθήνα (1981).
14. M. Protter and C. Morrey "Modern Mathematical Analysis" Addison - Wesley (1969).

Η στήλη των Μαθηματικών Ολυμπιάδων

Επιμέλεια - μετάφραση:
Δ.Γ. Κοντογιάννης

Από το τεύχος αυτό εγκαινιάζουμε μια νέα στήλη. Στη στήλη αυτή κάθε φορά θα προτείνονται λύσεις προβλημάτων που έχουν δοθεί κατά καιρούς σε φοιτητικούς μαθηματικούς διαγωνισμούς και οι λύσεις τους θα δημοσιεύονται σε επόμενα τεύχη.

Στο τεύχος θα παρουσιάσουμε ασκήσεις από τη Φοιτητική Μαθηματική Ολυμπιάδα Μόσχας (1982) και ουγγρικό φοιτητικό διαγωνισμό (1952).

Στο επόμενο τεύχος ακόμα θα παρουσιάσουμε ασκήσεις από τους περίφημους αμερικανικούς φοιτητικούς διαγωνισμούς Putnam.

Κάθε συνεργασία είναι ευπρόσδεκτη.

Φοιτητική Μαθηματική Ολυμπιάδα Μόσχα 1982

(I Τμήμα)

- 1) Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $a > 0$ να είναι
- $$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(at) t^{-a} = f(a).$$

Να δείξετε ότι $\varphi(a) = Ca^a$, όπου $C \in \mathbb{R}$.

- 2) Ποιο είναι το μέγιστο εμβαδό της προβολής σε επίπεδο, ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις a, b, c ;

- 3) Από πεπερασμένο σύνολο X λαμβάνουμε 1982 υποσύνολα του $A_1, A_2, \dots, A_{1982}$ ώστε καθένα από αυτά να περιέχει περισσότερα από τα μισά στοιχεία του X . Να δείξετε ότι μπορούμε να πάρουμε 10 στοιχεία του X τέτοια ώστε, σε κάθε υποσύνολο A_i ($1 \leq i \leq 1982$) να υπάρχει ένα τουλάχιστον από αυτά τα στοιχεία.

- 4) Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ πραγματικοί αριθμοί με
- $$\lambda_1^k + \lambda_2^k + \dots + \lambda_n^k > 0, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Έστω } f(t) = \frac{1}{(1-\lambda_1 t)(1-\lambda_2 t) \dots (1-\lambda_n t)}$$

Να δείξετε ότι $f^{(k)}(0) > 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Ουγγρικός Φοιτητικός Μαθηματικός Διαγωνισμός στη μνήμη M. Schweizer

1952

1. Να βρείτε όλα τα κυρτά πολύεδρα που δεν έχουν διαγώνιες.

2. Είναι δυνατό να βρείτε τρεις κωνικές τομές στο επίπεδο τέτοιες ώστε κάθε ευθεία του επιπέδου να τέμνει δυο τουλάχιστον από αυτές και από κάθε σημείο του επιπέδου να περνούν εφαπτόμενες σε δυο τουλάχιστον από αυτές;

3. Αν $a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_v^{k_v}$ είναι ένας τέλειος αριθμός, να

$$\text{δείξετε ότι } 2 < \prod_{i=1}^v \frac{p_i}{p_i - 1} < 4 \quad (1)$$

Αν ακόμα ο a είναι περιττός, τότε $\prod_{i=1}^v \frac{p_i}{p_i - 1} < 2\sqrt{2}$.

4. Έστω a θετικός ακέραιος. Να δείξετε ότι, για $0 < x < \frac{\pi}{v+1}$,

$$\text{η παράσταση } \eta \mu x - \frac{\eta \mu 2x}{2} + \dots + (-1)^{v+1} \frac{\eta \mu vx}{v} - \frac{x}{2}$$

είναι θετική αν v είναι περιττός και αρνητική αν ο v είναι άρτιος.